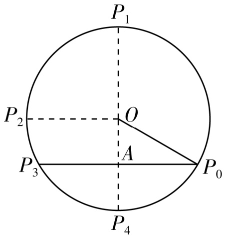
第一章 三角函数

§1 周期变化

对点上分

1. ABC 【解析】如图,设水轮与水面接触的宽度为 P_0P_3,过点 O 作直径 $P_1P_4 \perp P_0P_3$,垂足为点 A.



依题意 $OA=1.8$ m,$OP_0=3.6$ m,所以 $\angle AOP_0=60°$,$\angle P_0OP_1=120°$,点 P 第一次到达最高点 P_1 需要的时间为 $\frac{120}{360}\times 60=20(\text{s})$,A 选项正确.

根据对称性可知,点 P 由点 P_0 运动到点 P_3,需要的时间为 $20\times2=40(\text{s})$,B 选项正确.

当水轮转动 95 s 时,位置与转动 $95-60=35(\text{s})$ 时相同,35 s 转过的角度为 $\frac{35}{60}\times360°=210°$,过点 O 作 $OP_2\perp P_1P_4$ 交水轮于点 P_2,如图,则此时点 P 在水面上方点 P_2 的位置,距离水面 1.8 m,C 选项正确.

当水轮转动 50 s 时,易知点 P 位于点 P_4 的位置,在水面下方,距离水面 $3.6-1.8=1.8(\text{m})$,D 选项错误. 故选 ABC.

2. D 【解析】$\because f(x)$ 是周期为 2 的周期函数,$\therefore f(x)$ 在 $[1,2]$ 上的图象和在 $[-1,0]$ 上的图象相同,排除 A,B,C,故 D 正确.

3. C 【解析】$\because f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数,对任意的实数 x 有 $f(x)=f(x+6)$,

$\therefore f(x)$ 的周期 $T=6$,

当 $x\in(-3,3]$ 时,$f(x)=|x|$,

$\therefore f(100)=f(6\times16+4)=f(4)=f(-2)=|-2|=2$,故 C 正确.

4. B

攻略上分 本题在确定 $f(x)$ 的周期时，除常规解法外，还可利用大招攻略1求解. 根据题目条件 $f(x)$ 为奇函数，且满足 $f(1-x)=f(3+x)$，可求得一个对称轴+一个对称中心，利用大招攻略1中的结论可直接求得 $f(x)$ 的周期.

【解析】因为 $f(1-x)=f(3+x)$，所以 $f(-x)=f(x+4)$. 又因为 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数，所以 $f(-x)=-f(x)$，且 $f(0)=0$，所以 $f(x+4)=-f(x)$，所以 $f(x+8)=-f(x+4)$，所以 $f(x+8)=f(x)$，所以 $f(x)$ 是周期为8的周期函数，所以 $f(2)=f(10)=1$，$f(8)=f(0)=0$. 因为 $f(4)=f(4-8)=f(-4)=-f(4)$，所以 $f(4)=0$. 因为 $f(6)=f(6-8)=f(-2)=-f(2)$，所以 $f(6)=-1$. 所以 $f(2)+f(4)+f(6)+f(8)+f(10)=1+0+(-1)+0+1=1$，**故B正确.**

规律点拨 由奇函数 $f(x)$ 满足 $f(1-x)=f(3+x)$，可得 $f(x)$ 的图象关于点 $(0,0)$ 和直线 $x=2$ 对称，所以 $f(x)$ 的周期 $T=4\times|2-0|=8$. 其余步骤同上述解析.

5.【解】(1) 函数 $y=f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的周期函数，且周期 $T=5$，所以 $f(4)=f(-1)$，而函数 $y=f(x)(x\in[-1,1])$ 是奇函数，所以 $f(-1)=-f(1)$，所以 $f(1)+f(4)=0$.

(2) 由 $y=f(x)$ 在 $[1,4]$ 上是二次函数，且当 $x=2$ 时，函数 $y=f(x)$ 取得最小值 -5，可设 $f(x)=a(x-2)^2-5(a\neq0, 1\leqslant x\leqslant4)$，因为 $f(1)+f(4)=0$，所以 $a-5+4a-5=0$，可得 $a=2$，所以 $f(x)=2x^2-8x+3$，$x\in[1,4]$.

(3) 函数 $y=f(x)(x\in[-1,1])$ 是奇函数，且 $y=f(x)$ 在 $[0,1]$ 上是一次函数，令 $f(x)=kx(k\neq0,-1\leqslant x\leqslant1)$，

由(2)得 $f(1)=-3$，则 $-3=k\times1$，解得 $k=-3$，所以当 $-1\leqslant x\leqslant1$ 时，$f(x)=-3x$.

当 $4\leqslant x\leqslant6$ 时，$-1\leqslant x-5\leqslant1$，所以 $f(x)=f(x-5)=-3x+15$.

当 $6<x\leqslant9$ 时，$1<x-5\leqslant4$，所以 $f(x)=f(x-5)=2(x-7)^2-5$.

所以 $y=f(x)$ 在 $[4,9]$ 上的解析式为

$f(x)=\begin{cases}-3x+15, x\in[4,6],\\2(x-7)^2-5, x\in(6,9].\end{cases}$

当 $x\in[4,6]$ 时，$f(x)_{\max}=f(4)$，$f(x)_{\min}=f(6)$；

当 $x\in(6,9]$ 时，由二次函数的性质得 $f(x)_{\max}=f(9)$，$f(x)_{\min}=f(7)$，

计算得 $f(4)=3$，$f(6)=-3$，$f(7)=-5$，$f(9)=3$，故 $y=f(x)$ 在 $[4,9]$ 上的最大值为 3，最小值为 -5.

§2　任意角

2.1　角的概念推广+

2.2　象限角及其表示

对点上分

1. B　【解析】任意角除了包括正角和负角外，还有零角，**故 A 错误**；

钝角是终边在第二象限的角，**故 B 正确**；

终边在第二象限的角不一定大于终边在第一象限的角，例如：$150°$ 角是终边在第二象限的角，$390°$ 角是终边在第一象限的角，显然 $390°>150°$，**故 C 错误**；

当角 α 与角 β 的终边相同时，角 α 与角 β 不一定相等，例如：$45°$ 角和 $405°$ 角终边相同，但两个角并不相等，**故 D 错误**.

2. B　【解析】由题意可得 $\angle AOB=120°$，设 $\angle BOC=\theta$，则 $\angle AOC=\angle AOB+\angle BOC=120°+\theta=-150°$，解得 $\theta=-270°$，所以射线 OB 绕端点 O 顺时针旋转 $270°$，**故 B 正确**.

3. ABD　【解析】$423°=63°+360°$，即 $63°$ 角与 $423°$ 角终边相同，**A 正确**；

$1\ 143°=63°+3\times360°$，即 $63°$ 角与 $1\ 143°$ 角终边相同，**B 正确**；

$-117°=63°-180°$，即 $63°$ 角与 $-117°$ 角终边不相同，**C 错误**；

$-297°=63°-360°$，即 $63°$ 角与 $-297°$ 角终边相同，**D 正确. 故选 ABD.**

4. D　【解析】角 α 的终边与 $65°$ 角的终边关于 y 轴对称，则角 α 的终边与 $115°$ 角的终边相同，则 $\alpha=k\cdot360°+115°(k\in\mathbf{Z})$. **故 D 正确.**

5. A　【解析】若 α 是锐角，则 $0°<\alpha<90°$，α 一定是第一象限角.

若 α 是第一象限角，不妨取 $\alpha=-330°$，此时 α 不是锐角.

所以“α 是锐角”是“α 是第一象限角”的充分不必要条件，**故 A 正确.**

6. A

攻略上分 根据终边相同的角的概念求出 α,β 的关系式，可知 $\alpha-\beta$ 的结果，结合大招攻略 2 中轴线角的集合表示即可判断出 $\alpha-\beta$ 的终边位置.

【解析】$\because$ 角 α,β 的终边相同，$\therefore \alpha=k\cdot360°+\beta,k\in\mathbf{Z}$,

$\therefore \alpha-\beta=k\cdot360°+\beta-\beta=k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}$,

$\therefore$ 角 $\alpha-\beta$ 的终边在 x 轴的非负半轴上.

故 A 正确.

7. C 【解析】当 $k=2n,n\in\mathbf{Z}$ 时，题干中的集合为 $\{\alpha\mid n\cdot360°\leqslant\alpha\leqslant n\cdot360°+60°,n\in\mathbf{Z}\}$；

当 $k=2n+1,n\in\mathbf{Z}$ 时，题干中的集合为 $\{\alpha\mid n\cdot360°+180°\leqslant\alpha\leqslant n\cdot360°+240°,n\in\mathbf{Z}\}$. 故 C 正确.

易错警示 **应用终边相同的角的公式时忽略整数范围的限制**

本题利用给定的角的集合求角的终边所在区域时，容易将 $k\cdot180°$ 误认为是 $k\cdot360°$，导致漏解. 实际解题时要注意对 k 是奇数还是偶数进行分类讨论.

8. $\{\alpha\mid-120°+k\cdot360°\leqslant\alpha\leqslant135°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$

攻略上分 本题求终边落在阴影区域的角的集合，利用通法攻略 3 求解即可.

【解析】由题图，与 240°角终边相同的角为 $-120°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}$，与 135°角终边相同的角为 $135°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}$,

所以终边落在阴影部分(包括边界)的角 α 的集合为 $\{\alpha\mid-120°+k\cdot360°\leqslant\alpha\leqslant135°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$.

易错警示 **写区域角时忽略 k 取值的一致性而致错**

(1)写角的范围时应按从小角到大角(k 取同一个整数时)的顺序书写，终边按逆时针方向旋转扫过这个区域；

(2)边界是实线时包括边界，不等式中应该带“=”，边界是虚线时不包括边界，不等式中不带“=”.

9. D 【解析】$\because \alpha$ 是钝角，即 $90°<\alpha<180°$,

$\therefore -90°<-\frac{\alpha}{2}<-45°$，即$-\frac{\alpha}{2}$是第四象限角，故 D 正确.

10. C　【解析】若 α 是第一象限角，则 $k\cdot 360°<\alpha<90°+k\cdot 360°, k\in\mathbf{Z}$，所以$-k\cdot 360°<90°-\alpha<90°-k\cdot 360°, k\in\mathbf{Z}$，则 $90°-\alpha$ 是第一象限角，故 A 错误；

$90°-k\cdot 360°<180°-\alpha<180°-k\cdot 360°, k\in\mathbf{Z}$，则 $180°-\alpha$ 是第二象限角，故 B 错误；

$180°-k\cdot 360°<270°-\alpha<270°-k\cdot 360°, k\in\mathbf{Z}$，则 $270°-\alpha$ 是第三象限角，故 C 正确；

$-90°-k\cdot 360°<-\alpha<-k\cdot 360°, k\in\mathbf{Z}$，则$-\alpha$ 是第四象限角，故 D 错误.

§3　弧度制

3.1　弧度概念+

3.2　弧度与角度的换算

对点上分

1. C　【解析】依题意，二十四节气将一个圆 24 等分，所以每一份的弧度数为$\frac{2\pi}{24}=\frac{\pi}{12}$，故圆上一点从谷雨节气到大雪节气的优弧所对圆心角的弧度数为 $15\times\frac{\pi}{12}=\frac{5\pi}{4}$. 故 C 正确.

2. ABD　【解析】$67°30'$ 化成弧度是$\frac{\pi}{180}\times 67.5=\frac{3}{8}\pi$，故 A 正确；

$-\frac{10\pi}{3}=-\frac{10\pi}{3}\times\frac{180°}{\pi}=-600°$，故 B 正确；

$-150°=-150\times\frac{\pi}{180}=-\frac{5}{6}\pi$，故 C 错误；

$\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{12}\times\frac{180°}{\pi}=15°$，故 D 正确.

规律点拨　角度数$\times\frac{\pi}{180}=$弧度数，弧度数$\times\frac{180°}{\pi}=$角度数.

3. B　【解析】150 分钟后是 7:00，时针指向 7，分针指向 12，故此时时针与分针的夹角 $\alpha=\frac{5}{12}\times 2\pi=\frac{5\pi}{6}$.

4. $\alpha<\beta<\gamma<\theta=\varphi$　【解析】方法一：$\alpha=15°=$

$15\times\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{12}$，$\theta=105°=105\times\frac{\pi}{180}=\frac{7\pi}{12}$.

显然$\frac{\pi}{12}<\frac{\pi}{10}<1<\frac{7\pi}{12}$，故 $\alpha<\beta<\gamma<\theta=\varphi$.

方法二：$\beta=\frac{\pi}{10}=\frac{\pi}{10}\times\frac{180°}{\pi}=18°$，$\gamma=1\approx57°18'$，$\varphi=\frac{7\pi}{12}\times\frac{180°}{\pi}=105°$. 显然 $15°<18°<57°18'<105°$，故 $\alpha<\beta<\gamma<\theta=\varphi$.

5. D 【解析】在同一个表达式中，角度制与弧度制不能混用，**故 A，B 错误**. 与$\frac{9\pi}{4}$终边相同的角可以写成 $2k\pi+\frac{9\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$的形式，$k=-2$ 时，$2k\pi+\frac{9\pi}{4}=-\frac{7\pi}{4}$，$315°$换算成弧度制为$\frac{7\pi}{4}$，**故 C 错误，D 正确**.

易错警示 忽略角的度量单位的一致性

角的表示必须保持单位一致，做题时易忽略此点导致角度与弧度共用，从而错选.

6. D 【解析】$\because$ $\pi-\alpha$ 的终边与 α 的终边关于 y 轴对称，$\therefore$ β 与 $\pi-\alpha$ 的终边相同，即 $\beta=2k\pi+(\pi-\alpha)(k\in\mathbf{Z})$，$\therefore$ $\alpha+\beta=\alpha+2k\pi+(\pi-\alpha)=2k\pi+\pi(k\in\mathbf{Z})$. **故 D 正确**.

7. AB 【解析】因为 α 与$-\alpha$ 的终边关于 x 轴对称，而 α 是第二象限角，所以$-\alpha$ 是第三象限角，所以 $\pi-\alpha$ 是第一象限角，**故 A 正确，D 错误**；

因为 α 是第二象限角，所以$\frac{\pi}{2}+2k\pi<\alpha<\pi+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，所以$\frac{\pi}{4}+k\pi<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，故$\frac{\alpha}{2}$是第一或第三象限角，**故 B 正确**；

因为 α 是第二象限角，所以$\frac{3\pi}{2}+\alpha$ 是第一象限角，**故 C 错误**.

8. 【解】(1) 因为 $\alpha=1\ 200°=1\ 200\times\frac{\pi}{180}=\frac{20\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}+3\times2\pi$，所以角 α 与$\frac{2\pi}{3}$的终边相同，且$\frac{\pi}{2}<\frac{2\pi}{3}<\pi$，所以角 α 是第二象限角.

(2) 题图①：因为 $75°=\frac{5\pi}{12}$，$330°=\frac{11\pi}{6}=$

$2\pi-\frac{\pi}{6}$,所以阴影部分内(不包括边界)的角的集合为$\left\{\theta \mid 2k\pi-\frac{\pi}{6}<\theta<2k\pi+\frac{5\pi}{12},k\in\mathbf{Z}\right\}$;

题图②:因为$30^{\circ}=\frac{\pi}{6}$,$90^{\circ}=\frac{\pi}{2}$,$210^{\circ}=\frac{7\pi}{6}=\pi+\frac{\pi}{6}$,$270^{\circ}=\frac{3\pi}{2}=\pi+\frac{\pi}{2}$,所以阴影部分内(不包括边界)的角的集合为$\left\{\theta \mid k\pi+\frac{\pi}{6}<\theta<k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$.

9. D 【解析】因为扇形的圆心角为120°,转化为弧度是$\frac{2\pi}{3}$,弧长为4π,设扇形半径为r,则$\frac{2\pi r}{3}=4\pi$,解得$r=6$. **故 D 正确.**

易错警示 **忽略扇形弧长与面积公式中角的度量制**

弧度制下关于扇形的公式相对更为简洁,应用时要先完成圆心角由角度向弧度的转化,不能混用.

10. B 【解析】设该扇形的半径为r,因为扇形的圆心角为$\frac{\pi}{3}$,其所对的弦长为$6\sqrt{3}$,则$r=6\sqrt{3}$,所以该扇形的面积为$\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{3}\times(6\sqrt{3})^{2}=18\pi$,**故 B 正确.**

11. C 【解析】由已知得扇形ABC的面积为$\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{3}\times2^{2}=\frac{2\pi}{3}$.

由已知可得,勒洛三角形的面积等于扇形ABC面积的 3 倍减去三角形ABC面积的 2 倍,所以勒洛三角形的面积为$3\times\frac{2\pi}{3}-2\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times2^{2}=2\pi-2\sqrt{3}$. **故 C 正确.**

12. B 【解析】设扇形的弧长为l,半径为r,则$l+2r=24$,所以扇形的面积$S=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{4}l\cdot2r\leqslant\frac{1}{4}\left(\frac{l+2r}{2}\right)^{2}=\frac{1}{4}\times12^{2}=36$,当且仅当$l=2r$,即$l=12$,$r=6$时取等号,所以该扇形的面积的最大值是 36,**故 B 正确.**

一题多解 设扇形的弧长为l,半径为r,则$l+2r=24$,所以扇形的面积$S=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}(24-2r)r=-r^{2}+12r=-(r-6)^{2}+36\leqslant36$,当$r=6$时,$S$取最大值,所以该扇形的面积的最大值是 36,**故 B 正确.**

13. $\frac{1}{2}$ 【解析】设扇形圆心角的弧度数为 $\theta,\theta\in(0,2\pi)$，弧长为 l cm，半径为 r cm，依题意有 $\begin{cases}l+2r=10,①\\ \frac{1}{2}lr=4,②\end{cases}$

由①②得，$r^2-5r+4=0$，解得 $r_1=1$，$r_2=4$.

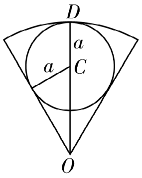
当 $r_1=1$ 时，$l=8$，此时 $\theta=8$ rad$>2\pi$ rad，舍去；

当 $r_2=4$ 时，$l=2$，此时 $\theta=\frac{1}{2}$ rad. 所以扇形圆心角的弧度数为 $\frac{1}{2}$.

易错警示 忽视扇形是圆的一部分

因为扇形是圆的一部分，所以 θ 应满足 $0<\theta<2\pi$，本题易忽略圆心角的范围限制.

14. 2π 【解析】设扇形的半径为 r，则 $\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3}r^2=\frac{3\pi}{2}$，解得 $r=3$. 如图，设



割出的圆半径为 a，圆心为 C，则当圆的面积最大时，$CO=\frac{a}{\sin\frac{\pi}{6}}=2a$，$r=3=CO+DC=3a$，故 $a=1$，所以面积最大的圆的周长为 2π.

15. 【解】(1) 利用扇形的面积公式可得 $\frac{1}{2}\theta\times20^2-\frac{1}{2}\theta\times x^2=100$，所以 $\theta=\frac{200}{400-x^2}$.

因为 $0<\theta<2\pi$，所以 $0<\frac{200}{400-x^2}<2\pi$，解得 $-\frac{10\sqrt{4\pi^2-\pi}}{\pi}<x<\frac{10\sqrt{4\pi^2-\pi}}{\pi}$，又 $0<x<20$，所以 $0<x<\frac{10\sqrt{4\pi^2-\pi}}{\pi}$，故 $\theta=\frac{200}{400-x^2}\left(0<x<\frac{10\sqrt{4\pi^2-\pi}}{\pi}\right)$.

(2) 依题意可得 $\overset{\frown}{AD}=x\theta$ 米，$\overset{\frown}{BC}=20\theta$ 米，所以栅栏的长度 $y=x\theta+20\theta+2\times(20-x)$，

将 $\theta=\frac{200}{400-x^2}$ 代入上式，整理可得 $y=2(20-x)+\frac{200}{20-x}=2\left(20-x+\frac{100}{20-x}\right)\geqslant4\sqrt{(20-x)\times\frac{100}{20-x}}=40$，当且仅当 $x=10$

时取等号，所以栅栏长度的最小值为 40 米.

§1～§3 节测上分

1. A 【解析】①每天日出日落，周期为一天；②潮汐是指海水在天体（主要是月球和太阳）引潮力作用下所产生的周期性运动；而③海啸和④地震不是周期变化. **故 A 正确.**

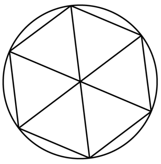
2. ABD 【解析】$240°=\frac{240}{180}\pi=\frac{4}{3}\pi$，**故 A 正确；**

$1\ \text{rad}=\frac{180°}{\pi}>1°$，**故 B 正确；**

用弧度制量角时，角的大小与圆的半径无关，**故 C 错误；**

设扇形的半径为 R，扇形的圆心角为 α，则扇形的面积 $S=\frac{1}{2}\alpha R^2$，所以 $R=\sqrt{\frac{2S}{\alpha}}$，设扇形的周长为 p，弧长为 l，则 $p=2R+l=(2+\alpha)R=(2+\alpha)\sqrt{\frac{2S}{\alpha}}=\sqrt{2S}\times\left(\frac{2}{\sqrt{\alpha}}+\sqrt{\alpha}\right)\geqslant\sqrt{2S}\times2\sqrt{\frac{2}{\sqrt{\alpha}}\times\sqrt{\alpha}}=4\sqrt{S}$，当且仅当 $\frac{2}{\sqrt{\alpha}}=\sqrt{\alpha}$，即 $\alpha=2$ 时，周长取得最小值 $4\sqrt{S}$，**D 正确. 故选 ABD.**

3. A 【解析】设圆的半径为 r，由于圆内接正六边形每条边对应的圆心角为 $60°$，则圆内接正六边形的边长为 r，所以这条弧所对的圆心角为 $\frac{r}{r}=1$. **故 A 正确.**



4. C 【解析】若 α 为钝角，则终边落在第二象限，当 $k=0$ 时，$\alpha+k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 为第二象限角；

当 $k=1$ 时，$\alpha+k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 为第四象限角. **故 C 正确.**

5. D 【解析】∵ 角 α 的终边在第一象限，

∴ $k\cdot360°<\alpha<90°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}$，

则 $k\cdot120°<\frac{\alpha}{3}<30°+k\cdot120°,k\in\mathbf{Z}$.

当 $k=3n(n\in\mathbf{Z})$ 时，角 $\frac{\alpha}{3}$ 的终边在第一象限；

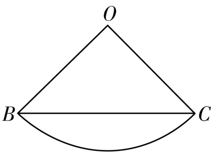
当 $k=3n+1(n\in\mathbf{Z})$ 时，角 $\frac{\alpha}{3}$ 的终边在第二象限；

当 $k=3n+2(n\in\mathbf{Z})$ 时,角 $\frac{\alpha}{3}$ 的终边在第三象限.

综上,角 $\frac{\alpha}{3}$ 的终边不可能在第四象限,**故选 D.**

6. B 【解析】$\left\{\alpha \,\middle|\, \frac{5\pi}{6}+2k\pi\leqslant\alpha\leqslant\pi+2k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}\cup\left\{\alpha \,\middle|\, \frac{11\pi}{6}+2k\pi\leqslant\alpha\leqslant2\pi+2k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}=\left\{\alpha \,\middle|\, \frac{5\pi}{6}+2k\pi\leqslant\alpha\leqslant(2k+1)\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}\cup\left\{\alpha \,\middle|\, \frac{5\pi}{6}+(2k+1)\pi\leqslant\alpha\leqslant(2k+2)\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}=\left\{\alpha \,\middle|\, \frac{5\pi}{6}+k\pi\leqslant\alpha\leqslant(k+1)\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$,**故 B 正确.**

7. A 【解析】作出大致示意图,如图. 由题意可知,"弓"的长,即 $\overset{\frown}{BC}=\frac{\pi}{4}\times2+\frac{\pi}{8}=\frac{5\pi}{8}$,所以 $\angle BOC=\frac{\frac{5\pi}{8}}{1.25}=\frac{\pi}{2}$,则掷铁饼者双手之间的距离,即 BC 约为 $1.25\times\sqrt{2}=\frac{5\sqrt{2}}{4}$(米). **故 A 正确.**



8. D 【解析】利用终边相同的角的关系,得 $\alpha=n\cdot360^\circ+x+45^\circ(n\in\mathbf{Z})$,$\beta=m\cdot360^\circ+x-45^\circ(m\in\mathbf{Z})$,则 $\alpha+\beta=(m+n)\cdot360^\circ+2x(n\in\mathbf{Z},m\in\mathbf{Z})$ 与 x 有关,**故 AC 错误.**

又 $\alpha-\beta=(n-m)360^\circ+90^\circ(n\in\mathbf{Z},m\in\mathbf{Z})$,因为 $m,n\in\mathbf{Z}$,所以 $k=n-m\in\mathbf{Z}$,所以 $\alpha-\beta=k\cdot360^\circ+90^\circ(k\in\mathbf{Z})$. **故 B 错误,D 正确.**

9. B 【解析】$\because f(x+2)=-f(x)$,

$\therefore f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$,即函数 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数,

则 $f\left(\frac{11}{2}\right)=f\left(\frac{11}{2}-4\right)=f\left(\frac{3}{2}\right)=f\left(2-\frac{1}{2}\right)=-f\left(-\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)$,

$f\left(\frac{5}{3}\right)=f\left(2-\frac{1}{3}\right)=-f\left(-\frac{1}{3}\right)=f\left(\frac{1}{3}\right)$.

$\because f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上单调递减,

$\therefore f\left(\frac{1}{3}\right)>f\left(\frac{1}{2}\right)>f(1)$,

即 $f(1)<f\left(\frac{11}{2}\right)<f\left(\frac{5}{3}\right)$.

故 B 正确.

10. C 【解析】由函数 $y=f(x+3)$ 的图象关于直线 $x=-3$ 对称,

可知 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=0$ 对称,

即 $f(x)$ 是偶函数,**故①正确**;

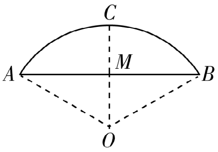
由 $f(x)=f(x+4)+f(2)$ 和 $f(x)$ 为偶函数,可得 $f(-2)=f(2)=f(2)+f(2)=2f(2)$,即 $f(2)=0$,**故②正确**;

$f(x)=f(x+4)+f(2)=f(x+4)$,故 4 是 $f(x)$ 的一个周期,又对 $\forall x_1,x_2\in[0,2]$,当 $x_1\neq x_2$ 时,都有 $(x_2-x_1)[f(x_2)-f(x_1)]>0$,即 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上单调递增,

根据偶函数性质可知 $f(x)$ 在 $[-2,0]$ 上单调递减,则 4 是 $f(x)$ 的最小正周期,**故③正确**;

由上面的结论可知 $f(3)=f(-1)>f(0)=f(-4)$,**故④错误. 故选 C.**

11. $1\quad \sqrt{3}+\frac{1}{2}$ 【解析】如图所示,$OC\perp AB$,垂足为



M,$\angle AOB=\frac{2\pi}{3}$,$AB=2\sqrt{3}$ 米,则 $\angle AOM=\angle MOB=\frac{\pi}{3}$,$AM=MB=\sqrt{3}$ 米,

所以 $AO=\frac{AM}{\sin\angle AOM}=\frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2$(米),

$OM=AO\cos\angle AOM=1$(米),

所以 $CM=OC-OM=1$(米),

则该弧田的面积是 $\frac{1}{2}\times(2\sqrt{3}\times1+1^2)=\sqrt{3}+\frac{1}{2}$(平方米).

12.【解】(1)$\alpha=-1\ 725^\circ=75^\circ-5\times360^\circ$,

故 α 与 75° 角的终边相同,又 $0^\circ<75^\circ<90^\circ$,所以 α 是第一象限角.

(2)依题意,得 $k\cdot360^\circ+40^\circ\leqslant\alpha\leqslant k\cdot360^\circ+140^\circ$,$k\in\mathbf{Z}$,

所以有 $\left\{\frac{\alpha}{2}\ \middle|\ k\cdot180^\circ+20^\circ\leqslant\frac{\alpha}{2}\leqslant k\cdot180^\circ+70^\circ,k\in\mathbf{Z}\right\}$.

当 $k=2n$,$n\in\mathbf{Z}$ 时,$\frac{\alpha}{2}$ 是第一象限角;

当 $k=2n+1, n\in\mathbf{Z}$ 时，$\frac{\alpha}{2}$ 是第三象限角.

故 $\frac{\alpha}{2}$ 是第一或第三象限角.

13. 【解】(1)由题意得 $AB=x$ m，$OA=2x$ m，由扇形面积公式得扇形 OAD 的面积为 $2x\times2x\times\frac{1}{2}\times\theta=2x^2\theta(\text{m}^2)$，扇形 OBC 的面积为 $x\times x\times\frac{1}{2}\times\theta=\frac{1}{2}x^2\theta(\text{m}^2)$，

故 $y=2x^2\theta-\frac{1}{2}x^2\theta=\frac{3}{2}x^2\theta$，由弧长公式得 $\overset{\frown}{BC}$ 的长度为 $x\theta$ m，$\overset{\frown}{AD}$ 的长度为 $2x\theta$ m，

而园圃的外围周长为 50 m，故 $x\theta+2x\theta+x+x=50$，解得 $\theta=\frac{50-2x}{3x}$，

因为圆心角 θ 小于 π，所以 $0<\frac{50-2x}{3x}<\pi$，解得 $\frac{50}{3\pi+2}<x<25$，

又 $x\in(0,10]$，故 $x\in\left(\frac{50}{3\pi+2},10\right]$，故 $y=\frac{3}{2}x^2\times\frac{50-2x}{3x}=25x-x^2$，该函数的定义域为 $\left(\frac{50}{3\pi+2},10\right]$.

(2)由二次函数的性质得 $y=25x-x^2$ 在 $\left(\frac{50}{3\pi+2},10\right]$ 内单调递增，当 $x=10$ m 时，y 的最大值为 $25\times10-10^2=150(\text{m}^2)$，$\overset{\frown}{AD}$ 的长度为 $2x\times\frac{50-2x}{3x}=\frac{2\times(50-2\times10)}{3}=20(\text{m})$，$\overset{\frown}{BC}$ 的长度为 $x\times\frac{50-2x}{3x}=\frac{50-2\times10}{3}=10(\text{m})$.

§4　正弦函数和余弦函数的概念及其性质

4.1　单位圆与任意角的正弦函数、余弦函数定义+4.2　单位圆与正弦函数、余弦函数的基本性质

对点上分

1. B

攻略上分　已知角终边上一点的坐标即可求出它的三角函数值，具体可见通法攻略 4.

【解析】在平面直角坐标系 xOy 中，∵ 角 α 以 x 轴的非负半轴为始边，它的终边经过点 $(4,3)$，∴ $\cos\alpha=\dfrac{4}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{4}{5}$. **故 B 正确.**

规律点拨 已知角 α 的终边上一点 P（异于原点）的坐标，可求出点 P 到原点的距离 r，然后利用三角函数的定义计算三角函数值.

2. C 【解析】因为角 α 的终边过点 $\left(\sin\dfrac{\pi}{6},-\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$，即 $\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$，

则 $\sin\alpha=\dfrac{-\dfrac{1}{2}}{\sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **故 C 正确.**

方法总结 特殊角的三角函数值

α 角度	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$
α 弧度	0	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{2\pi}{3}$
正弦 $\sin\alpha$	0	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
余弦 $\cos\alpha$	1	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	0	$-\dfrac{1}{2}$
正切 $\tan\alpha$	0	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	不存在	$-\sqrt{3}$

α 角度	$135°$	$150°$	$180°$	$270°$	$360°$	
α 弧度	$\dfrac{3\pi}{4}$	$\dfrac{5\pi}{6}$	π	$\dfrac{3\pi}{2}$	2π	
正弦 $\sin\alpha$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	0	-1	0	
余弦 $\cos\alpha$	$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1	
正切 $\tan\alpha$	-1	$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	0	不存在	0	

3. C 【解析】因为 $P(m,2)$ 是角 α 终边上的一点，所以 $\sin\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{4+m^2}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，解得 $m=\pm1$. **故 C 正确.**

4. C 【解析】由题知 $\cos\alpha\neq0$. 设角 α 的终边上一点 $P(a,-3a)\ (a\neq0)$，则 $OP=\sqrt{a^2+9a^2}=\sqrt{10}\,|a|$（$O$ 为坐标原点）.

当 $a>0$ 时，$OP=\sqrt{10}\,a$，此时 $\sin\alpha=\dfrac{-3a}{\sqrt{10}\,a}=-\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$，$\cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{10}\,a}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，所以 $10\sin\alpha+\dfrac{3}{\cos\alpha}=-3\sqrt{10}+3\sqrt{10}=0$.

当 $a<0$ 时，$OP=-\sqrt{10}a$，此时 $\sin\alpha=\frac{-3a}{-\sqrt{10}a}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，$\cos\alpha=\frac{a}{-\sqrt{10}a}=-\frac{\sqrt{10}}{10}$，所以 $10\sin\alpha+\frac{3}{\cos\alpha}=3\sqrt{10}-3\sqrt{10}=0$. **故 C 正确.**

5. 2 【解析】由题意有 $\cos\theta=\frac{2a-1}{\sqrt{(2a-1)^2+(a+2)^2}}=\frac{3}{5}\Rightarrow 11a^2-20a-4=0$，解得 $a=2$ 或 $a=-\frac{2}{11}$. 由于 $\cos\theta=\frac{3}{5}>0$，则 $2a-1>0$，所以 $a=2$ 满足题意.

易错警示 **应用三角函数定义求参时忽略参数取值范围**

求解此类问题时要注意利用三角函数值的正负来判断终边上这一点横、纵坐标的正负，如本题需要根据 $\cos\theta=\frac{3}{5}>0$ 得出横坐标大于 0 这一隐含条件.

6. A 【解析】若 θ 为第一象限角，则 $\sin\theta>0$，充分性成立.

若 $\sin\theta>0$，则 θ 为第一象限角或第二象限角，或角的终边在 y 轴的非负半轴上，则必要性不成立. **故 A 正确.**

7. B 【解析】若 α 是第四象限角，则 $\sin\alpha<0$，$\cos\alpha>0$，所以点 $P(\sin\alpha,\cos\alpha)$ 在第二象限，**故 B 正确.**

8. A 【解析】因为 $\sin\theta\cos\theta>0$，且 $|\cos\theta|=\cos\theta$，则有 $\begin{cases}\sin\theta>0,\\ \cos\theta>0,\end{cases}$ 故角 θ 是第一象限角，**故 A 正确.**

9. C 【解析】因为角 α 是第一象限角，所以 $2k\pi<\alpha<\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$，

所以 $k\pi<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbf{Z}$，所以 $\frac{\alpha}{2}$ 是第一、三象限角.

当 $\frac{\alpha}{2}$ 是第一象限角时，$\sin\frac{\alpha}{2}>0$，$\cos\frac{\alpha}{2}>0$，$\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}>0$；

当 $\frac{\alpha}{2}$ 是第三象限角时，$\sin\frac{\alpha}{2}<0$，$\cos\frac{\alpha}{2}<0$，$\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}>0$.

综上，$\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}>0$ 一定成立，**故 C**

正确.

10. D 【解析】易知$-1\leqslant\sin x\leqslant 1$.

当$0\leqslant\sin x\leqslant 1$时,$|\sin x|=\sin x$,函数$y=\sin x-|\sin x|=\sin x-\sin x=0$.

当$-1\leqslant\sin x<0$时,$|\sin x|=-\sin x$,函数$y=\sin x-|\sin x|=\sin x+\sin x=2\sin x\in[-2,0)$.

综上,函数$y=\sin x-|\sin x|$的值域为$[-2,0]$,**故 D 正确.**

11. C 【解析】依题意有$\begin{cases}\dfrac{3-x}{x}>0,\\ \cos x\neq 0,\end{cases}$

即$\begin{cases}0<x<3,\\ x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z},\end{cases}$

$\therefore 0<x<3$且$x\neq\dfrac{\pi}{2}$,

$\therefore$ 函数$f(x)=\lg\dfrac{3-x}{x}+\dfrac{1}{\cos x}$的定义域为$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{2},3\right)$.

故 C 正确.

12. C 【解析】当$k=1$时,$f(x)=\sin x$在区间$\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$上的值域$A_1=[0,1]$,

当$k=2$时,$f(x)=\sin x$在区间$\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right]$上的值域$A_2=\left[\dfrac{\sqrt{3}}{2},1\right]$,

则$A_1\cap A_2=\left[\dfrac{\sqrt{3}}{2},1\right]$.

当$k=3$时,$f(x)=\sin x$在区间$\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{3}\right]$上的值域$A_3=\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$,

则$A_1\cap A_2\cap A_3=\left\{\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right\}$.

当$k=4$时,$f(x)=\sin x$在区间$\left[\dfrac{\pi}{5},\dfrac{\pi}{4}\right]$上的值域$A_4=\left[\sin\dfrac{\pi}{5},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$,

则$A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4=\varnothing$,故$k$的最小值是 4. **故 C 正确.**

13. $\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{11\pi}{6}\right)$ 【解析】要使函数$f(x)=\sqrt{x(2\pi-x)}+\ln(\sqrt{3}-2\cos x)$有意义,

只需$\begin{cases}x(2\pi-x)\geqslant 0,\\ \sqrt{3}-2\cos x>0,\end{cases}$即$\begin{cases}x(2\pi-x)\geqslant 0,\\ \cos x<\dfrac{\sqrt{3}}{2}.\end{cases}$

由$x(2\pi-x)\geqslant 0$,可得$0\leqslant x\leqslant 2\pi$,

由$\cos x<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,结合余弦函数的单调性,

可得$\frac{\pi}{6}+2k\pi<x<\frac{11\pi}{6}+2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$，则$\frac{\pi}{6}<x<\frac{11\pi}{6}$，所以函数$f(x)$的定义域为$\left(\frac{\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\right)$.

14.【解】$y=\frac{3-\cos x}{2-\cos x}=1+\frac{1}{2-\cos x}$,

令$t=\cos x$，则$-1\leqslant t\leqslant 1$，$y=1+\frac{1}{2-t}$.

因为函数$y=1+\frac{1}{2-t}$在$[-1,1]$上单调递增，

所以当$t=-1$时，函数$y=1+\frac{1}{2-t}$取得最小值$\frac{4}{3}$，当$t=1$时，函数$y=1+\frac{1}{2-t}$取得最大值2，即$\frac{4}{3}\leqslant 1+\frac{1}{2-t}\leqslant 2$.

所以所求函数的最大值为2，最小值为$\frac{4}{3}$，值域为$\left[\frac{4}{3},2\right]$.

15. B 【解析】根据余弦函数的周期性，可得$\cos 780°=\cos(360°\times 2+60°)=\cos 60°=\frac{1}{2}$. **故 B 正确.**

16.【解】因为$f(x)$的最小正周期是π，且为偶函数，

所以$f\left(\frac{5\pi}{3}\right)=f\left(\frac{5\pi}{3}-2\pi\right)=f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=f\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

因为当$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$时，$f(x)=\sin x$,

所以$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

所以$f\left(\frac{5\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

17. C 【解析】由$y=\sin x$的单调性以及正弦函数值的符号可知$x\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$时，函数$y=\sin x$单调递减，且函数值为负数，**故 C 正确.**

18. C 【解析】$c=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\because 0<\frac{1}{2}<\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}$,

$\therefore 0<\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}<\cos\frac{1}{2}<1$,

则$0<c<a<1$.

$\because \log_5\frac{1}{2}<\log_5 1=0$，$\therefore b<0$,

$\therefore a>c>b$，**故 C 正确.**

19. C 【解析】方程 $1-\sin^2x-\sin x+2a=0$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上有解，即 $2a=\sin^2x+\sin x-1$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上有解，

令 $t=\sin x, t\in(0,1]$，则 $y=t^2+t-1=\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}\in(-1,1]$，则实数 a 应满足 $-1<2a\leqslant1$，所以 $-\frac{1}{2}<a\leqslant\frac{1}{2}$. **故 C 正确.**

20. A 【解析】因为 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上单调递增，且 $f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0$，所以当 $x\leqslant-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时，$f(x)\leqslant0$，当 $-\frac{\sqrt{3}}{2}<x<0$ 时，$f(x)>0$.

又因为 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且 $f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0$，所以当 $0<x\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时，$f(x)\leqslant0$，当 $x>\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时，$f(x)>0$.

又 $f(0)=0$，所以 $f(x)\leqslant0$ 的解集为 $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right]\cup\left[0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

因为 $f(\cos B)\leqslant0$，所以 $\cos B\leqslant-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $0\leqslant\cos B\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$，

又因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $\frac{5\pi}{6}\leqslant B<\pi$ 或 $\frac{\pi}{6}\leqslant B\leqslant\frac{\pi}{2}$，即 B 的取值范围是 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{6},\pi\right)$，**故 A 正确.**

21. A 【解析】A 选项，若 $m<0, n<0$，则 $0<t<\pi$，得 $[t,2t]\subseteq(0,2\pi)$，

由题知 $[t,2t]\subseteq\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$，故 $\frac{\pi}{2}<t<\frac{3\pi}{4}$，所以 $\pi<2t<\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}<3t<\frac{9\pi}{4}$，

得 $[2t,3t]\subseteq\left(\pi,\frac{9\pi}{4}\right)$，故 $[2t,3t]\subseteq\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$，不存在满足上述关系的实数 t，**故 A 为假命题；**

B 选项，当 $t=\frac{\pi}{6}$ 时，函数 $y=\cos x$ 在

$\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$上的最大值为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，在$\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$上的最大值为$\frac{1}{2}$，

此时$m=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$n=\frac{1}{2}$，故$\exists t>0$，$m>0$且$n>0$，**故B为真命题；**

C选项，当$t=\frac{\pi}{3}$时，函数$y=\cos x$在$\left[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$上的最大值为$\frac{1}{2}$，在$\left[\frac{2\pi}{3},\pi\right]$上的最大值为$-\frac{1}{2}$，此时$m=\frac{1}{2}$，$n=-\frac{1}{2}$，故$\exists t>0$，$m>0$且$n<0$，**故C为真命题；**

D选项，当$t=\frac{2\pi}{3}$时，函数$y=\cos x$在$\left[\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right]$上的最大值为$-\frac{1}{2}$，在$\left[\frac{4\pi}{3},2\pi\right]$上的最大值为1，此时$m=-\frac{1}{2}$，$n=1$，故$\exists t>0$，$m<0$且$n>0$，**故D为真命题．故选A．**

22.【解】(1)由$2^x-1\neq0$，解得$x\neq0$，所以$f(x)$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$．

(2)$f(x)>0$，即$f(x)=\left(\frac{1}{2^x-1}+\frac{1}{2}\right)\sin x=\frac{1+2^x}{2(2^x-1)}\cdot\sin x>0$，

因为$1+2^x>0$，

所以$\begin{cases}2^x-1>0,\\ \sin x>0\end{cases}$或$\begin{cases}2^x-1<0,\\ \sin x<0,\end{cases}$

即$\begin{cases}x>0,\\ 2k\pi<x<\pi+2k\pi, k\in\mathbf{Z}\end{cases}$或$\begin{cases}x<0,\\ -\pi-2k\pi<x<-2k\pi, k\in\mathbf{Z},\end{cases}$

解得$2k\pi<x<\pi+2k\pi$或$-\pi-2k\pi<x<-2k\pi$，$k\in\mathbf{N}$．

所以不等式的解集为$\{x\mid 2k\pi<x<\pi+2k\pi$或$-\pi-2k\pi<x<-2k\pi, k\in\mathbf{N}\}$．

(3)$f(x)=\left(\frac{1}{2^x-1}+\frac{1}{2}\right)\sin x=\frac{1+2^x}{2(2^x-1)}\cdot\sin x$，

令$f(x)=0$，因为$\frac{1+2^x}{2(2^x-1)}\neq0$，所以$\sin x=0$，

解得$x=n\pi$，$n\in\mathbf{Z}$，所以$f(x)$的零点为$x=n\pi$，$n\in\mathbf{Z}$且$n\neq0$，

令$-2\ 024\leqslant n\pi\leqslant 2\ 024$，解得$\frac{-2\ 024}{\pi}\leqslant n\leqslant\frac{2\ 024}{\pi}$，

因为$\frac{2\ 024}{\pi}\approx 644.259$，

所以$f(x)$在区间$[-2\ 024,2\ 024]$上的零点个数为 1 288.

4.3　诱导公式与对称+

4.4　诱导公式与旋转

对点上分

1. D　【解析】$\because \cos\left(\alpha+k\cdot\frac{\pi}{4}\right)=\cos\alpha$，

$\therefore k\cdot\frac{\pi}{4}=2n\pi, n\in\mathbf{Z}$，$\therefore k=8n, n\in\mathbf{Z}$，结合选项可知 D **正确**.

2. B　【解析】因为$\alpha+\beta=\pi$，

所以$\sin\alpha=\sin(\pi-\beta)=\sin\beta$，

故①正确，②错误；

$\cos\alpha=\cos(\pi-\beta)=-\cos\beta$，

故③正确，④错误. 故正确的式子有 2 个，B **正确.**

3. D　【解析】$\cos 20°=\sin(90°-20°)=\sin 70°$，**故 A 错误.**

$\sin(-20°)=-\sin 20°$，**故 B 错误.**

$\sin 70°\neq\sin 20°$，**故 C 错误.**

$\sin 160°=\sin(180°-20°)=\sin 20°$，**故 D 正确.**

4. C

> **攻略上分**　将所求式子中的角化为$\frac{k\pi}{2}\pm\alpha(k\in\mathbf{Z})$的形式，利用大招攻略 5 判断符号，准确求解.

【解析】$\sin\left(-\frac{29\pi}{3}\right)=\sin\left(-10\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，**故 C 正确.**

> **易错警示**　**应用诱导公式出现符号错误**
>
> 利用诱导公式求三角函数值时，易把符号弄错，因此应用诱导公式解决问题时，要把"确定三角函数值的符号"放在第一位. 不能不考虑角的实际范围，一律把它"看作锐角".

方法总结 对于给角求值的问题，一般利用诱导公式将任意角的正弦、余弦函数化为锐角的正弦、余弦函数后，再求值.

5. B 【解析】因为 $\sin\alpha=\frac{1}{3}$，

所以 $\sin(\pi+\alpha)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha-\sin\alpha=-2\sin\alpha=-\frac{2}{3}$，**故 B 正确.**

6. A 【解析】$\cos(30°-\alpha)=\cos[90°-(60°+\alpha)]=\sin(60°+\alpha)=-\frac{1}{4}$，**故 A 正确.**

方法总结 对于给值求值问题，关键在于观察已知角与所求角之间的关系，若可以用已知角与特殊角$\left(\pm\frac{\pi}{2},\pm\pi,\pm\frac{3\pi}{2},n\pi\pm\pi(n\in\mathbf{Z})\text{等}\right)$表示所求角，则可以应用诱导公式求解，同时注意求解过程中整体思维的灵活运用.

7. $-\frac{2}{5}$ 【解析】已知角 α 的终边经过点 $P(-1,2)$，则 $\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos\alpha=\frac{-1}{\sqrt{5}}=-\frac{\sqrt{5}}{5}$.

若角 β 的终边与角 α 的终边关于 y 轴对称，则 $\sin\beta=\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

$\cos\beta=-\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

所以 $\cos(\alpha-\pi)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)=-\cos\alpha\times(-\sin\beta)=\frac{\sqrt{5}}{5}\times\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)=-\frac{2}{5}$.

8. A 【解析】$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)+\sin(\theta+\pi)=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{2}-\theta\right)-\sin\theta=-\sin\theta-\sin\theta=-2\sin\theta$.

故 A 正确.

9. (1)【解】原式$=\frac{\sin(4\times360°+\alpha)\cdot\cos(\alpha-3\times360°)}{\cos(180°+\alpha)\cdot[-\sin(180°+\alpha)]}=\frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{-\cos\alpha\cdot\sin\alpha}=-1$.

(2)【证明】在 $\triangle ABC$ 中，$A+B+C=\pi$，

则 $\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{C}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{C}{2}\right)=\sin\frac{C}{2}-\sin\frac{C}{2}=0.$

故 $\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{C}{2}\right)=0$ 成立.

方法总结 解决与三角形有关的化简证明问题,要注意隐含条件 $A+B+C=\pi$(A,B,C 为三角形的内角),并应用诱导公式进行转化,进而达到目的.

能力上分

1. B 【解析】$\because \cos(\pi-\alpha)=-\frac{4}{5}$,$\therefore \cos\alpha=\frac{4}{5}$,$\therefore \sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\alpha=\frac{4}{5}$. **故 B 正确.**

2. A 【解析】因为 $\sin 60°=\sin(90°-30°)=\cos 30°$,
所以 $f(\sin 60°)=f(\cos 30°)=\cos(3\times 30°)=\cos 90°=0$.
故 A 正确.

3. B 【解析】在 $\triangle ABC$ 中,$\cos A=\sin B$,
$\therefore \cos A=\cos\left(\frac{\pi}{2}-B\right)$,
$\therefore A=\frac{\pi}{2}-B$ 或 $-A=\frac{\pi}{2}-B$,即 $A+B=\frac{\pi}{2}$ 或 $B-A=\frac{\pi}{2}$,$\therefore C$ 为锐角或直角,充分性不成立;
当 $C=\frac{\pi}{2}$ 时,$A+B=\frac{\pi}{2}$,$A=\frac{\pi}{2}-B$,
$\therefore \cos A=\cos\left(\frac{\pi}{2}-B\right)=\sin B$,必要性成立.
所以"$\cos A=\sin B$"是"$C=\frac{\pi}{2}$"的必要不充分条件,**故 B 正确.**

4. B 【解析】$\because \sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{5}$,
$\therefore \sin\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\pi+\alpha-\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{5}-\frac{1}{5}=-\frac{2}{5}$. **故 B 正确.**

5. B 【解析】设点 Q 的初始位置为 Q_1,点 P 的初始位置为 P_1,$\angle Q_1OP_1=\frac{\pi}{3}$,设 t s 后

两点重合，

则 $5t-2t=\frac{\pi}{3}+2k\pi(k\in\mathbf{N})$，即 $t=\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}(k\in\mathbf{N})$，此时点 $Q\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}+5t\right),\sin\left(-\frac{\pi}{3}+5t\right)\right)$，

即 $Q\left(\cos\left(\frac{2\pi}{9}+\frac{10k\pi}{3}\right),\sin\left(\frac{2\pi}{9}+\frac{10k\pi}{3}\right)\right)(k\in\mathbf{N})$.

当 $k=0$ 时，$Q\left(\cos\frac{2\pi}{9},\sin\frac{2\pi}{9}\right)$，**故 A 不符合题意.**

当 $k=1$ 时，$Q\left(\cos\frac{32\pi}{9},\sin\frac{32\pi}{9}\right)$，即 $Q\left(-\cos\frac{5\pi}{9},-\sin\frac{5\pi}{9}\right)$，**故 C 不符合题意.**

当 $k=2$ 时，$Q\left(\cos\frac{62\pi}{9},\sin\frac{62\pi}{9}\right)$，即 $Q\left(-\cos\frac{\pi}{9},\sin\frac{\pi}{9}\right)$，**故 D 不符合题意.**

故选 B.

6. A　【解析】∵ 角 θ 的终边经过点 $P(4a,-3a)(a\neq0)$，∴ 当 $a>0$ 时，$\sin\theta=\frac{-3a}{\sqrt{(4a)^2+(-3a)^2}}=\frac{-3a}{|5a|}=-\frac{3}{5}$，

$\cos\theta=\frac{4a}{\sqrt{(4a)^2+(-3a)^2}}=\frac{4a}{|5a|}=\frac{4}{5}$，

∴ $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+\sin(3\pi+\theta)=\cos\theta-\sin\theta=\frac{4}{5}-\left(-\frac{3}{5}\right)=\frac{7}{5}$；

当 $a<0$ 时，$\sin\theta=\frac{-3a}{\sqrt{(4a)^2+(-3a)^2}}=\frac{-3a}{|5a|}=\frac{3}{5}$，$\cos\theta=\frac{4a}{\sqrt{(4a)^2+(-3a)^2}}=\frac{4a}{|5a|}=-\frac{4}{5}$，∴ $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+\sin(3\pi+\theta)=\cos\theta-\sin\theta=-\frac{4}{5}-\frac{3}{5}=-\frac{7}{5}$.

故 A 正确.

易错警示 由含参坐标求解三角函数值时忽略参数的取值范围

根据角的终边上一点的含参坐标求解三角函数值时，一定要注意参数的取值范围，避免因漏掉情况而致错.

7.【证明】当 n 为偶数时，令 $n=2k,k\in\mathbf{Z}$，

左边 $=\dfrac{2\sin(\alpha+2k\pi)\cos(\alpha-2k\pi)}{\sin(\alpha+2k\pi)+\sin(\alpha-2k\pi)}=$

$\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha+\sin\alpha}=\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\sin\alpha}=\cos\alpha$,

右边 $=(-1)^{2k}\cos\alpha=\cos\alpha$,

$\therefore$ 左边 = 右边.

当 n 为奇数时,令 $n=2k-1, k\in\mathbf{Z}$,

左边 =

$\dfrac{2\sin(\alpha+2k\pi-\pi)\cos(\alpha-2k\pi+\pi)}{\sin(\alpha+2k\pi-\pi)+\sin(\alpha-2k\pi+\pi)}=$

$\dfrac{2\sin(\alpha-\pi)\cos(\alpha+\pi)}{\sin(\alpha-\pi)+\sin(\alpha+\pi)}=$

$\dfrac{2(-\sin\alpha)(-\cos\alpha)}{(-\sin\alpha)+(-\sin\alpha)}=$

$\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{-2\sin\alpha}=-\cos\alpha$,

右边 $=(-1)^{2k-1}\cos\alpha=-\cos\alpha$,

$\therefore$ 左边 = 右边.

综上所述, $\dfrac{2\sin(\alpha+n\pi)\cos(\alpha-n\pi)}{\sin(\alpha+n\pi)+\sin(\alpha-n\pi)}=$ $(-1)^n\cos\alpha, n\in\mathbf{Z}$ 成立.

§4 节测上分

1. D 【解析】由 $P(\cos(\pi+2),\ \sin(2\pi-2))$ 得 $P(-\cos 2, -\sin 2)$,
因为 $-\cos 2>0, -\sin 2<0$,
所以点 P 在第四象限,**故 D 正确.**

2. A 【解析】当 $\alpha=2k\pi+\dfrac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$ 时,一定可以推出 $\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$,
但是当 $\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$ 时,不一定可以推出 $\alpha=2k\pi+\dfrac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$,例如 $\alpha=\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 也满足 $\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$,
所以“$\alpha=2k\pi+\dfrac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$”是“$\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$”的充分不必要条件,**故 A 正确.**

3. D 【解析】由 $\sin(3\pi+\alpha)=\dfrac{1}{3}$,
得 $-\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$,则 $\sin\alpha=-\dfrac{1}{3}$.
$\therefore \cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$,**故 D 正确.**

4. B 【解析】设 $\theta=\dfrac{\pi}{6}-\alpha$,则 $\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$,
$\alpha=\dfrac{\pi}{6}-\theta$,则 $\cos\left(\alpha+\dfrac{5\pi}{6}\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-\theta+\dfrac{5\pi}{6}\right)=\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$,**故 B**

正确.

5. A 【解析】因为 $y=\sin x$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，所以 $\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin\frac{\pi}{4}<\sin 1$，

又 $y=\ln x$ 在其定义域上单调递增，

所以 $\ln(\sin 1)>\ln\frac{\sqrt{2}}{2}$，即 $a<\ln\sqrt{2}=\frac{\ln 2}{2}<\frac{1}{2}$，

而 $y=\cos x$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减，

所以 $b=\cos 1>\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$，所以 $a<c<b$.

6. $\{x|1<x\leqslant 2\}$ 【解析】当 $x\in[0,5]$ 时，$y=2\cos x\in[-2,2]$，即 $M=\{y|-2\leqslant y\leqslant 2\}$.

又由函数 $y=\log_2(x-1)$，可知 $x-1>0$，解得 $x>1$，即 $N=\{x|x>1\}$.

所以 $M\cap N=\{x|1<x\leqslant 2\}$.

7. $\frac{5\pi}{12}$（答案不唯一） 【解析】因为点 $A(\cos\theta,\sin\theta)$ 与点 $B\left(\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right),\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\right)$ 关于 y 轴对称，

故其横坐标互为相反数，纵坐标相等，

即 $\sin\theta=\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$ 且 $\cos\theta=-\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$，

由诱导公式 $\sin\alpha=\sin(\pi-\alpha)$，$\cos\alpha=-\cos(\pi-\alpha)$，

得 $\theta+\frac{\pi}{6}=2k\pi+\pi-\theta=(2k+1)\pi-\theta,k\in\mathbf{Z}$，

解得 $\theta=k\pi+\frac{5\pi}{12},k\in\mathbf{Z}$，

则符合题意的 θ 值可以为 $\frac{5\pi}{12}$（答案不唯一）.

8. $-\frac{1}{5}$ 【解析】由题知 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{8}\right)=-\frac{3}{5}$，$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{8}\right)=\frac{4}{5}$.

所以 $\sin\left(\frac{11\pi}{8}-\alpha\right)+\cos\left(\alpha+\frac{5\pi}{8}\right)$

$=\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha-\frac{\pi}{8}\right)+\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}\right)$

$=\sin\left(-\frac{\pi}{2}-\alpha-\frac{\pi}{8}\right)-\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{8}\right)$

$=-\cos\left(-\alpha-\frac{\pi}{8}\right)-\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{8}\right)$

$=-\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{8}\right)-\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{8}\right)$

$=\frac{3}{5}-\frac{4}{5}=-\frac{1}{5}$.

9. (1)【解】由诱导公式，可得

$\frac{\sin(2\pi-\theta)\cos(3\pi-\theta)\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)}{\sin(\theta-\pi)\sin(3\pi+\theta)\cos(-\theta-\pi)}=$

$\frac{-\sin\theta\cdot(-\cos\theta)\cdot\sin\theta}{-\sin\theta\cdot(-\sin\theta)\cdot(-\cos\theta)}=-1$.

(2)【证明】若 $k=2n,n\in\mathbf{Z}$,

则左边 $=\frac{\sin(-\alpha)\cos\alpha}{\sin(\pi+\alpha)\cos(\pi-\alpha)}=$

$\frac{-\sin\alpha\cos\alpha}{(-\sin\alpha)(-\cos\alpha)}=-1$;

若 $k=2n+1,n\in\mathbf{Z}$,

则左边 $=\frac{\sin(\pi-\alpha)\cos(\pi+\alpha)}{\sin\alpha\cos(-\alpha)}=$

$\frac{\sin\alpha(-\cos\alpha)}{\sin\alpha\cos\alpha}=-1$.

综上，原式恒成立.

10.【解】(1)因为点 Q 在单位圆上且 $0<\beta<\frac{\pi}{2}$，所以 $x>0$ 且 $x^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2=1$,

解得 $x=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，即 $Q\left(\frac{2\sqrt{5}}{5},\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$.

由三角函数定义知，$\sin\beta=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos\beta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，故原式 $=\frac{2\sin\beta+5\cos\beta}{3\sin\beta-2\cos\beta}=-12$.

(2)由题意 $\sin\alpha=\sin\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\beta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos\alpha=\cos\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\beta=-\frac{\sqrt{5}}{5}$,

故 $P\left(-\frac{\sqrt{5}}{5},\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$.

§5　正弦函数、余弦函数的图象与性质再认识

5.1　正弦函数的图象与性质再认识

对点上分

1. C　【解析】$f(x)=\sin x+2|\sin x|=$

$\begin{cases}3\sin x,0\leqslant x\leqslant\pi,\\-\sin x,\pi<x\leqslant 2\pi,\end{cases}$

按五个关键点列表.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

续表

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y=\sin x$	0	1	0	-1	0
$y=\sin x+2\|\sin x\|$	0	3	0	1	0

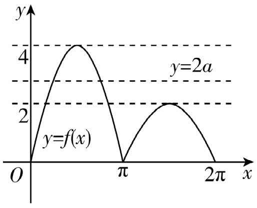
故第三个点的坐标是$(\pi,0)$,**故 C 正确.**

2. C 【解析】因为函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-\pi,0)\cup(0,\pi]$,关于原点对称,且 $f(-x)=\left(-x+\frac{1}{-x}\right)\sin(-x)=\left(x+\frac{1}{x}\right)\sin x=f(x)$,则函数 $f(x)=\left(x+\frac{1}{x}\right)\sin x$ 为偶函数,**故 B,D 错误;**

当 $x\in(0,\pi]$ 时,$f(x)\geqslant 0$,**故 A 错误,C 正确.**

3. $(1,2)$ 【解析】$f(x)=\sin x+3|\sin x|=\begin{cases}4\sin x, x\in[0,\pi),\\-2\sin x, x\in[\pi,2\pi],\end{cases}$

画出函数 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上的大致图象,如图.



由图象知,当 $2a\in(2,4)$,即 $a\in(1,2)$ 时,函数 $f(x)$ 的图象与直线 $y=2a$ 有两个交点,所以实数 a 的取值范围是 $(1,2)$.

4. C 【解析】令 $2\sin^2x-5\sin x+2>0$,整理得 $(2\sin x-1)(\sin x-2)>0$,

故 $-1\leqslant\sin x<\frac{1}{2}$,

则 $2k\pi-\frac{7\pi}{6}<x<2k\pi+\frac{\pi}{6}, k\in\mathbf{Z}$,

故函数 $f(x)$ 的定义域为 $\left(2k\pi-\frac{7\pi}{6}, 2k\pi+\frac{\pi}{6}\right)(k\in\mathbf{Z})$. **故 C 正确.**

5. C 【解析】由题意知 $f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$ 在区间 $[0,a]$ 上有且仅有两个零点,当 $x\in[0,a]$ 时,

$2x-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{6}, 2a-\frac{\pi}{6}\right]$,

则 $\begin{cases}2a-\frac{\pi}{6}\geqslant\pi,\\2a-\frac{\pi}{6}<2\pi,\end{cases}$ 解得 $\frac{7\pi}{12}\leqslant a<\frac{13\pi}{12}$,所以

实数 a 的最小值为$\frac{7\pi}{12}$,故 C 正确.

6. A 【解析】由 $x\in\mathbf{R}$,$f(-x)=-x-\sin(-x)=-x+\sin x=-f(x)$,知$f(x)$为奇函数,则 $c=-f(-\sqrt{3})=f(\sqrt{3})$,又$\frac{\pi}{2}<\sqrt{3}<2<\pi$,函数 $y=\sin x$ 在$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$上单调递减,故 $f(x)=x-\sin x$ 在$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$上单调递增,则$f(\sqrt{3})<f(2)<f(\pi)$,即 $a>b>c$.
故 A 正确.

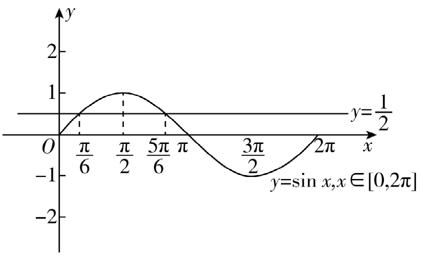
7. 0 【解析】由题意可知,函数 $f(x)=\sin\frac{\pi}{2}x$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4.$

又 $f(1)=\sin\frac{\pi}{2}=1$,$f(2)=\sin\pi=0$,$f(3)=\sin\frac{3\pi}{2}=-1$,$f(4)=\sin 2\pi=0$,所以 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=0.$

又 $2\ 023=4\times505+3$,所以 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2\ 022)+f(2\ 023)=f(1)+f(2)+f(3)=0.$

8. **攻略上分** 本题需解有关正弦函数的三角不等式,进而得到函数的定义域,具体可见通法攻略 6.

【解】正弦函数 $y=\sin x$ 和 $y=\frac{1}{2}$的大致图象如图.



当 $x\in[0,2\pi]$时,由 $\sin x\geqslant\frac{1}{2}$可得 $x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$,当 $x\in\mathbf{R}$ 时,由 $\sin x\geqslant\frac{1}{2}$可得 $x\in\left[\frac{\pi}{6}+2k\pi,\frac{5\pi}{6}+2k\pi\right]$,$k\in\mathbf{Z}.$

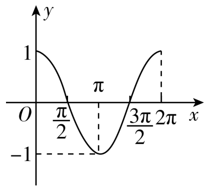
因为函数 $y=\sqrt{2\sin x-1}$ 的定义域为 $2\sin x-1\geqslant0$,即 $\sin x\geqslant\frac{1}{2}$,

所以 $y=\sqrt{2\sin x-1}$ 的定义域为 $\left[\frac{\pi}{6}+2k\pi,\frac{5\pi}{6}+2k\pi\right]$,$k\in\mathbf{Z}.$

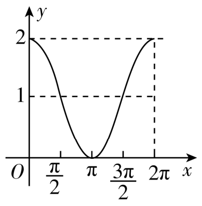
5.2　余弦函数的图象与性质再认识

对点上分

1. D　【解析】函数 $y=\cos x, x\in[0,2\pi]$ 的图象，如图所示.



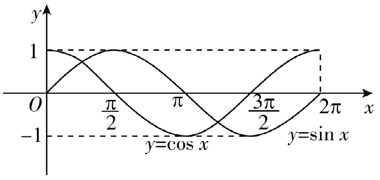
将函数 $y=\cos x, x\in[0,2\pi]$ 的图象向上平移 1 个单位长度得到 $y=1+\cos x$，$x\in[0,2\pi]$ 的图象，如图所示. 结合选项可知 D **正确**.



2. B　【解析】因为 $f(x)=\cos x-\cos^3 x$，$f(-x)=\cos(-x)-\cos^3(-x)=\cos x-\cos^3 x=f(x)$，所以 $f(x)$ 是偶函数，故排除选项 A，D；

当 $x=\dfrac{5\pi}{6}$ 时，$f\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^3=-\dfrac{\sqrt{3}}{8}<0$，故排除选项 C. **故 B 正确**.

3. AC　【解析】在同一平面直角坐标系中画出 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 在 $[0,2\pi]$ 上的图象，如图.

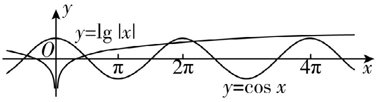


在 $[0,2\pi]$ 内，当 $\cos x=\sin x$ 时，$x=\dfrac{\pi}{4}$ 或 $x=\dfrac{5\pi}{4}$，结合图象可知满足 $\cos x>\sin x$ 的 x 的取值范围是 $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right)$ 和 $\left(\dfrac{5\pi}{4},2\pi\right]$. **故选 AC.**

4. D　【解析】$y=\cos x$ 与 $y=\lg|x|$ 都是偶函数，图象关于 y 轴对称，

当 $x=4\pi$ 时，$\lg 4\pi>\lg 10=1$，故作出函数 $y=\cos x$ 与函数 $y=\lg|x|$ 的大致图象如图

所示.



可知函数 $y=\cos x$ 与函数 $y=\lg|x|$ 的图象的交点个数是 6. **故 D正确.**

5. A 【解析】因为 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$，所以 $x+\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$，故 $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\in\left[\frac{1}{2},1\right]$，**故 A 正确.**

6. B 【解析】$1-2\cos x\geqslant 0$，即 $\cos x\leqslant\frac{1}{2}$，

解得 $\frac{\pi}{3}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{3}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

所以函数 $f(x)=\sqrt{1-2\cos x}$ 的定义域为 $\left[\frac{\pi}{3}+2k\pi,\frac{5\pi}{3}+2k\pi\right]$，$k\in\mathbf{Z}$.

故 B 正确.

7. A

攻略上分 本题要比较正、余弦值的大小，题中余弦值比较多，所以先利用诱导公式完成向余弦的“异化同”，再根据余弦函数的单调性“判增减”后比大小.

【解析】$\sin\frac{41\pi}{6}=\sin\left(8\pi-\frac{7\pi}{6}\right)=-\sin\frac{7\pi}{6}=\sin\frac{\pi}{6}=\cos\frac{\pi}{3}$，

$\cos\frac{7\pi}{4}=\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}$，

$\because y=\cos x$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减，

$\therefore \cos\frac{\pi}{12}>\cos\frac{\pi}{4}>\cos\frac{\pi}{3}$，

即 $a>c>b$，**故 A 正确.**

规律总结 利用三角函数的单调性比较三角函数值的大小，其方法是利用诱导公式，将角转化到三角函数的同一个单调区间上，再比较大小.

8. B 【解析】对于①，$f(x)=\cos|x|=\cos x$，其最小正周期为 2π，**①不正确；**

对于②，由 $x\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$，得 $2x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，所以 $\cos 2x<0$，$f(x)=|\cos 2x$

$l=-\cos 2x$ 在区间$\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增,

②**正确**;

对于③,令 $2x=k\pi,k\in\mathbf{Z}$,得 $x=\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$,当 $k=1$ 时,$x=\frac{\pi}{2}$,③**正确**.

故 B 正确.

§6　函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的性质与图象

6.1　探究 ω 对 $y=\sin \omega x$ 的图象的影响+6.2　探究 φ 对 $y=\sin(x+\varphi)$ 的图象的影响+6.3　探究 A 对 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象的影响

对点上分

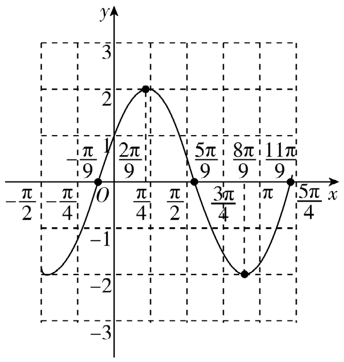
1. C　【解析】由“五点法”作图知,令 $4x=0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2},2\pi$,解得 $x=0,\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{8},\frac{\pi}{2}$,即为五个关键点的横坐标,**故 C 正确**.

2.【解】(1)因为 $f(x)=2\sin\left(\frac{3}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)$,

则列表如下:

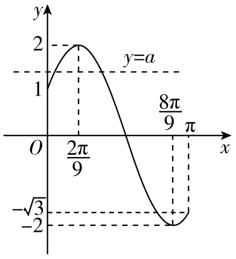
$\frac{3}{2}x+\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	$-\frac{\pi}{9}$	$\frac{2\pi}{9}$	$\frac{5\pi}{9}$	$\frac{8\pi}{9}$	$\frac{11\pi}{9}$
$f(x)$	0	2	0	-2	0

所以 $f(x)$ 的图象如图所示.



(2)因为 $x\in[0,\pi]$,所以 $\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{3}{2}x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{5\pi}{3}$,

又 $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2},\sin\frac{5\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$,结合(1)中图象,可知 $f(x)$ 在$[0,\pi]$上的图象如图,



因为方程 $f(x)=a$ 在 $x\in[0,\pi]$ 有两个不同的实数根，

所以 $f(x)$ 与 $y=a$ 的图象有两个交点，故 $a\in(-2,-\sqrt{3}]\cup[1,2)$.

3. D

攻略上分 变换前后函数名相同，本题考查了正弦型函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的参数 ω,φ 对于其图象的影响，根据通法攻略 8 的图象变换规则确定其变换过程即可.

【解析】先纵坐标不变，横坐标变为原来的 $\frac{1}{2}$，再向左平移 $\frac{\pi}{24}$ 个单位长度，

得到 $y=2\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{24}\right)\right]=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{12}\right)$ 的图象，**故 A 错误；**

先向左平移 $\frac{\pi}{24}$ 个单位长度，再把横坐标变为原来的 2 倍，纵坐标不变，得到 $y=2\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{24}\right)$ 的图象，**故 B 错误；**

先纵坐标不变，横坐标变为原来的 2 倍，再向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度，得到 $y=2\sin\cdot\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{\pi}{12}\right)\right]=2\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{24}\right)$ 的图象，**故 C 错误；**

先向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，再把横坐标变为原来的 $\frac{1}{2}$，纵坐标不变，得到 $y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象，**故 D 正确.**

易错警示 **忽略图象变换是针对“x”而言的**

用“变换法”作函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象时，“先平移后伸缩”，平移 $|\varphi|$ 个单位长度；“先伸缩后平移”，平移 $\left|\frac{\varphi}{\omega}\right|$ 个单位长度. 无论哪种变换，记住每一个变换总是对自变量 x 而言的.

方法总结 由函数 $y=\sin x$ 的图象通过变换得到函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$ 的图象主要有两种途径:"先平移后伸缩"与"先伸缩后平移".

(1)先平移(φ 变换)后伸缩(ω 变换):

$y=\sin x$ 的图象 $\xrightarrow[\text{平移}|\varphi|\text{个单位长度}]{\text{向左}(\varphi>0)\text{或向右}(\varphi<0)}$ $y=\sin(x+\varphi)$ 的图象 $\xrightarrow[\text{纵坐标不变}]{\text{横坐标变为原来的}\frac{1}{\omega}}$ $y=\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象 $\xrightarrow[\text{横坐标不变}]{\text{纵坐标变为原来的}A\text{倍}}$ $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象.

(2)先伸缩(ω 变换)后平移(φ 变换):

$y=\sin x$ 的图象 $\xrightarrow[\text{横坐标不变}]{\text{纵坐标变为原来的}A\text{倍}}$ $y=A\sin x$ 的图象 $\xrightarrow[\text{纵坐标不变}]{\text{横坐标变为原来的}\frac{1}{\omega}}$ $y=A\sin\omega x$ 的图象 $\xrightarrow[\text{平移}\left|\frac{\varphi}{\omega}\right|\text{个单位长度}]{\text{向左}(\varphi>0)\text{或向右}(\varphi<0)}$ $y=A\sin\left[\omega\left(x+\frac{\varphi}{\omega}\right)\right]=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象.

4. $\frac{\pi}{6}$　$\frac{1}{2}$　**【解析】**由题意可知 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{\pi}{2}\times2=\pi$,而 $\omega>0$,则 $\frac{2\pi}{\omega}=T=\pi$,所以 $\omega=2$,所以 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\right]=\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$,所以可将 $y=\cos x$ 的图象上所有的点先向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得到 $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象,再将所得图象上所有点的横坐标变为原来的 $\frac{1}{2}$,纵坐标不变,得到 $y=\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象,即 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象.

5. D

攻略上分 由已知图象确定函数解析式的方法具体可见大招攻略 9.

【解析】由题图知，$f(x)$ 的最小正周期 $T=2\times\left(\frac{11\pi}{12}-\frac{5\pi}{12}\right)=\pi$，又因为 $\omega>0$，所以 $\omega=\frac{2\pi}{\pi}=2$.

由题图知，函数 $f(x)$ 的图象经过点 $\left(-\frac{\pi}{12},0\right)$，

故 $f\left(-\frac{\pi}{12}\right)=A\sin\left(-\frac{\pi}{6}+\varphi\right)=0$，

所以 $-\frac{\pi}{6}+\varphi=2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

故 $\varphi=\frac{\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

又因为 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$.

又函数 $f(x)$ 的图象经过点 $(0,1)$，故 $f(0)=A\sin\frac{\pi}{6}=1$，解得 $A=2$.

所以函数 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$. **故 D 正确.**

6. C 【解析】由题图可知 $A=2$，

$f(x)$ 的最小正周期 T 满足 $\frac{1}{2}T=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{4}$，

因为 $\omega>0$，所以 $T=\frac{\pi}{2}=\frac{2\pi}{\omega}$，故 $\omega=4$，

所以 $f(x)=2\cos(4x+\varphi)$，

又点 $\left(\frac{\pi}{12},2\right)$ 在 $f(x)$ 的图象上，

所以 $f\left(\frac{\pi}{12}\right)=2\cos\left(4\times\frac{\pi}{12}+\varphi\right)=2$，

即 $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right)=1$，

所以 $\frac{\pi}{3}+\varphi=2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，即 $\varphi=-\frac{\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

而 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{3}$，

所以 $f(x)=2\cos\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)$.

故 C 正确.

7. C 【解析】由题意得，$A=2$，$f(x)$ 的最小正周期 $T=4\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{12}\right)=\pi$，

又 $\omega>0$，所以 $\omega=2$，$f(x)=2\sin(2x+\varphi)$，

由 $f\left(\frac{\pi}{12}\right)=2\sin\left(2\times\frac{\pi}{12}+\varphi\right)=2$，

得 $\sin\left(\frac{\pi}{6}+\varphi\right)=1$，所以 $\frac{\pi}{6}+\varphi=\frac{\pi}{2}+$

$2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,

且$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$,所以$\varphi=\frac{\pi}{3}$,$f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$,**故 A 正确**;

$2\times\frac{7\pi}{12}+\frac{\pi}{3}=\frac{3\pi}{2}$,此时$f(x)$取得最小值,**故 B 正确**;

当$-\frac{2\pi}{3}\leqslant x\leqslant-\frac{\pi}{6}$时,$-\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant 0$,此时$f(x)$不单调,**故 C 错误**;

$f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=2\sin 0=0$,**故 D 正确**.

8. D 【解析】设$f(x)$的最小正周期为T.

依题意$\frac{T}{2}=\frac{11\pi}{12}-\frac{7\pi}{12}=\frac{\pi}{3}$,所以$T=\frac{2\pi}{3}=\frac{2\pi}{|\omega|}$,又$\omega>0$,所以$\omega=3$,

又$f\left(\frac{7\pi}{12}\right)=A\sin\left(3\times\frac{7\pi}{12}+\varphi\right)=0$,

所以$3\times\frac{7\pi}{12}+\varphi=2\pi+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,

解得$\varphi=\frac{\pi}{4}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,

又$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$,所以$\varphi=\frac{\pi}{4}$,

所以$f(x)=A\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$,

又$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=A\sin\left(3\times\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=-1$,

所以$-A\cos\frac{\pi}{4}=-1$,解得$A=\sqrt{2}$,

所以$f(x)=\sqrt{2}\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$,

所以$f\left(\frac{61\pi}{36}\right)=\sqrt{2}\sin\left(3\times\frac{61\pi}{36}+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin\left(5\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{6}}{2}$. **故 D 正确.**

9. D 【解析】由$f(x)$的解析式可知,$y_M=2,y_N=-2$,

在直线$y=-x+3$中,令$y=2$,得$x=1$,令$y=-2$,得$x=5$,

故$M(1,2)$,$N(5,-2)$,即$f(1)=2$,$f(5)=-2$,

故$f(x)$的最小正周期$T=2\times(5-1)=8$,

即$\frac{2\pi}{|\omega|}=8$,又$\omega>0$,所以$\omega=\frac{\pi}{4}$,

故$f(x)=2\sin\left(\frac{\pi}{4}x+\varphi\right)$,

则$f(1)=2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)=2$,故

$\sin\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)=1$，即 $\frac{\pi}{4}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，得 $\varphi=\frac{\pi}{4}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

因为 $|\varphi|<\pi$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{4}$，

则 $f(x)=2\sin\left(\frac{\pi}{4}x+\frac{\pi}{4}\right)$，

可得 $f(0)=2\sin\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}$，

$f(1)=2\sin\frac{\pi}{2}=2$，$f(2)=2\sin\frac{3\pi}{4}=\sqrt{2}$，

$f(3)=2\sin\pi=0$，

$f(4)=2\sin\frac{5\pi}{4}=-\sqrt{2}$，

$f(5)=2\sin\frac{3\pi}{2}=-2$，

$f(6)=2\sin\frac{7\pi}{4}=-\sqrt{2}$，

$f(7)=2\sin 2\pi=0$，

因为 $f(0)+f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(7)=0$，$8\times253+3=2\ 027$，

所以 $f(0)+f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2\ 026)=253\times0+\sqrt{2}+2+\sqrt{2}=2+2\sqrt{2}$. **故 D 正确.**

10. D 【解析】由题图知，$A=2$，$f(x)$ 的最小正周期 $T=2\times\left(\frac{5\pi}{8}-\frac{\pi}{8}\right)=\pi$，又 $\omega>0$，

所以 $\omega=\frac{2\pi}{T}=2$.

由 $f\left(\frac{\pi}{8}\right)=2\sin\left(2\times\frac{\pi}{8}+\varphi\right)=2$，得 $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)=1$，

所以 $\frac{\pi}{4}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，解得 $\varphi=\frac{\pi}{4}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$.

因为 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{4}$，所以 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$，**故 A 错误；**

当 $x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ 时，$2x+\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$，此时 $f(x)$ 不单调，**故 B 错误；**

$f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度后得到 $y=f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=2\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{4}\right]=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象，$y=2\sin\left(2x-\right.$

$\left.\frac{\pi}{4}\right)$不是奇函数，**故 C 错误**；

令 $f(x)=0$，则 $\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=0$，解得 $2x+\frac{\pi}{4}=k\pi,k\in\mathbf{Z}$，即 $x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{8},k\in\mathbf{Z}$，所以 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的零点是 $-\frac{5\pi}{8},-\frac{\pi}{8},\frac{3\pi}{8}$ 和 $\frac{7\pi}{8}$，共 4 个，**故 D 正确**.

11.【解】(1)由 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$ 上单调递减，在区间 $\left(\frac{2\pi}{3},\pi\right)$ 上单调递增，可知直线 $x=\frac{2\pi}{3}$ 为函数 $f(x)$ 图象的对称轴，

设 $f(x)$ 的最小正周期为 T，因为函数 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{5\pi}{12},0\right)$ 对称，且对称点 $\left(\frac{5\pi}{12},0\right)$ 在单调区间 $\left(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$ 内，

所以 $\frac{T}{4}=\frac{2\pi}{3}-\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{4}$，则 $T=\pi$，又 $\omega>0$，所以 $\omega=\frac{2\pi}{T}=2$，

且 $f\left(\frac{5\pi}{12}\right)=A\sin\left(2\times\frac{5\pi}{12}+\varphi\right)=0$，所以 $\frac{5\pi}{6}+\varphi=\pi+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，则 $\varphi=\frac{\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，又 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$.

由 $f(0)=1$ 得 $A\sin\frac{\pi}{6}=1$，可得 $A=2$，

所以 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.

(2)由 $[f(x)]^2-\sqrt{3}f(x)\leqslant 0$ 得 $0\leqslant f(x)\leqslant\sqrt{3}$.

当 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$2x+\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{5\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right]$，又 $0\leqslant 2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\leqslant\sqrt{3}$，

所以 $0\leqslant\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$，则 $0\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant\pi$，

解得 $-\frac{\pi}{12}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{12}$ 或 $\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{12}$，

所以满足不等式 $[f(x)]^2-\sqrt{3}\cdot f(x)\leqslant 0$ 的解集为 $\left[-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{12}\right]\cup\left[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{12}\right]$.

§5～§6 节测上分

1. D　【解析】由已知得 $A=2$，$\begin{cases}\dfrac{\omega\pi}{12}+\varphi=\dfrac{\pi}{2},\\ \dfrac{7\omega\pi}{12}+\varphi=\dfrac{3\pi}{2},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}\omega=2,\\ \varphi=\dfrac{\pi}{3}.\end{cases}$ **故 D 正确.**

2. D　【解析】曲线 $y=f(x)$ 与曲线 $y=\cos x$ 关于 x 轴对称，则 $f(x)=-\cos x$. **故 D 正确.**

3. B　【解析】因为函数 $f(x)$ 的定义域是 $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$，所以函数 $y=f(\sin x)+\ln(\cos x)$ 有意义需满足 $\begin{cases}-\dfrac{1}{2}\leqslant\sin x\leqslant\dfrac{\sqrt{3}}{2},\\ \cos x>0,\end{cases}$ 解得 $2k\pi-\dfrac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\dfrac{\pi}{3}$ $(k\in\mathbf{Z})$，故函数的定义域为 $\left\{x\,\middle|\,2k\pi-\dfrac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\dfrac{\pi}{3},k\in\mathbf{Z}\right\}$，**故 B 正确.**

4. B　【解析】①由周期公式可得 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$，**故①正确；**

②由 $x\in\left[-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{12}\right]$，得 $2x+\dfrac{\pi}{3}\in\left[-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right]\subseteq\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$，**故②正确；**

③根据函数图象的平移法则可得，函数 $y=\sin 2x$ 的图象上的所有点向左平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位长度，得到 $y=\sin\left[2\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\right]=\sin\left(2x+\dfrac{2\pi}{3}\right)$ 的图象，**故③错误. 故 B 正确.**

5. D　【解析】函数 $f(x)=\left(\dfrac{\sin x}{e^{x}+e^{-x}}\right)\cos x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，由 $f(-x)=\dfrac{\sin(-x)}{e^{x}+e^{-x}}\cdot\cos(-x)=-\dfrac{\sin x}{e^{x}+e^{-x}}\cdot\cos x=-f(x)$，可得函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，图象关于原点对称，**排除 A，C；**当 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 时，$f(x)>0$，当 $x=0$ 或 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 时，$f(x)=0$，**故 B 不满足题意. 故选 D.**

规律点拨 函数图象的辨识可从以下方面入手：

(1)从函数的定义域，判断图象的左右位置；

(2)从函数的值域，判断图象的上下位置；

(3)从函数的单调性，判断图象的变化趋势；

(4)从函数的奇偶性，判断图象的对称性；

(5)从函数的特殊点，排除不符合要求的图象.

6. A 【解析】由题可知，$f(x)$的最小正周期 $T\geqslant 2\times\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{5\pi}{6}$，则$\frac{2\pi}{|\omega|}\geqslant\frac{5\pi}{6}$，又 $\omega>0$，则$\frac{12}{5}\geqslant\omega>0$.

令$-\pi+2k\pi\leqslant\omega x-\frac{\pi}{4}\leqslant 2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，

解得$\frac{-\frac{3}{4}\pi+2k\pi}{\omega}\leqslant x\leqslant\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{\omega}(k\in\mathbf{Z})$，

因为$f(x)$在区间$\left(\frac{\pi}{3},\frac{3\pi}{4}\right)$上单调递增，

所以$\begin{cases}\frac{-\frac{3}{4}\pi+2k\pi}{\omega}\leqslant\frac{\pi}{3},\\ \frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{\omega}\geqslant\frac{3\pi}{4},\end{cases}$解得$-\frac{9}{4}+6k\leqslant\omega\leqslant\frac{1}{3}+\frac{8}{3}k(k\in\mathbf{Z})$，

因为$\frac{12}{5}\geqslant\omega>0$，

所以当 $k=0$ 时，可得 $0<\omega\leqslant\frac{1}{3}$.

故 A 正确.

7. D 【解析】根据函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ $\left(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$的部分图象，

可得$\frac{3}{4}\times\frac{2\pi}{|\omega|}=\frac{11\pi}{12}-\frac{\pi}{6}$，

$\therefore\ \omega=2$，

由$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(2\times\frac{\pi}{6}+\varphi\right)=1$，

得 $2\times\frac{\pi}{6}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，解得 $\varphi=\frac{\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

又$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，$\therefore\ \varphi=\frac{\pi}{6}$，

故函数 $f(x)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$，**故 D 正确.**

8. ABC 【解析】由图象知，$A=3$，函数 $f(x)$ 的最小正周期 $T=4\times\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{12}\right)=\pi$，则 $|\omega|=\dfrac{2\pi}{T}=2$，又 $\omega>0$，故 $\omega=2$，则 $f(x)=3\sin(2x+\varphi)$，由 $f\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=3$ 得 $2\times\dfrac{\pi}{12}+\varphi=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$，且 $|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$，则 $k=0$，$\varphi=\dfrac{\pi}{3}$，因此 $f(x)=3\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

对于 A，函数 $y=f(x)$ 的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度所得图象的函数解析式为 $f\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=3\sin 2x$，即得到 $y=3\sin 2x$ 的图象，**故 A 正确**；

对于 B，$f\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=3\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{3}\right)=0$，则函数 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(-\dfrac{\pi}{6},0\right)$ 对称，**故 B 正确**；

对于 C，$f\left(-\dfrac{5\pi}{12}\right)=3\sin\left(-\dfrac{5\pi}{6}+\dfrac{\pi}{3}\right)=-3$，则函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=-\dfrac{5\pi}{12}$ 对称，**故 C 正确**；

对于 D，当 $x\in\left[-\dfrac{2\pi}{3},-\dfrac{\pi}{6}\right]$ 时，$2x+\dfrac{\pi}{3}\in[-\pi,0]$，当 $2x+\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{\pi}{2}$，即 $x=-\dfrac{5\pi}{12}$ 时，$f(x)$ 取得最小值，所以函数 $f(x)$ 在 $\left[-\dfrac{2\pi}{3},-\dfrac{\pi}{6}\right]$ 上不单调，**故 D 错误.**

9. AD 【解析】对于 A，把 $A(0,1)$ 代入得 $f(0)=2\sin\varphi=1$，则 $\sin\varphi=\dfrac{1}{2}$，

因为 $|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$，**故 A 正确**；

对于 B，$B(x_0,-2)(x_0>0)$ 为函数图象的最低点，$|AB|_{\min}=\sqrt{13}$，故 $\sqrt{x_0^2+(1+2)^2}=\sqrt{13}$，解得 $x_0=2$（负值舍去），设 $f(x)$ 的最小正周期为 T，则 $\dfrac{1}{2}T<2<\dfrac{3}{4}T$，其中 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}(\omega>0)$，故 $\dfrac{\pi}{2}<\omega<\dfrac{3\pi}{4}$，所以 $\dfrac{7\pi}{6}<2\omega+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{5\pi}{3}$，又

$2\sin\left(2\omega+\frac{\pi}{6}\right)=-2$，则 $\sin\left(2\omega+\frac{\pi}{6}\right)=-1$，

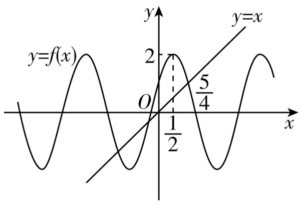
故 $2\omega+\frac{\pi}{6}=\frac{3\pi}{2}$，解得 $\omega=\frac{2\pi}{3}$，**故 B 错误；**

对于 C，$f(x)=2\sin\left(\frac{2\pi}{3}x+\frac{\pi}{6}\right)$，$x\in\left[-\frac{1}{4},1\right]$ 时，$\frac{2\pi}{3}x+\frac{\pi}{6}\in\left[0,\frac{5\pi}{6}\right]$，

故 $\sin\left(\frac{2\pi}{3}x+\frac{\pi}{6}\right)\in[0,1]$，$f(x)=2\sin\left(\frac{2\pi}{3}x+\frac{\pi}{6}\right)\in[0,2]$，**故 C 错误；**

对于 D，画出函数 $f(x)$ 的图象与直线 $y=x$，如图所示，

由图可知，$f(x)$ 的图象与直线 $y=x$ 有三个交点，



故 $y=x-f(x)$ 有三个零点，**故 D 正确.**

10. 1（答案不唯一） 【解析】由题意得，$\cos\left(\frac{2\pi}{\omega}\times\omega+\varphi\right)=\cos\varphi=\frac{1}{2}$，

因为 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}$，

因为将 $y=f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度，

所得函数 $y=\cos\left(\omega x-\frac{\pi\omega}{3}+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象关于 y 轴对称，

所以 $\frac{\pi}{3}-\frac{\pi\omega}{3}=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，所以 $\omega=1-3k$，$k\in\mathbf{Z}$，

又 $\omega>0$，故 ω 可取 1（答案不唯一）.

11. $\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$ 【解析】不等式 $\cos^5\theta-\sin^5\theta<7(\sin^3\theta-\cos^3\theta)$，

等价于 $\sin^3\theta+\frac{1}{7}\sin^5\theta>\cos^3\theta+\frac{1}{7}\cos^5\theta$.

又函数 $f(x)=x^3+\frac{1}{7}x^5$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，所以 $\sin\theta>\cos\theta$，

故有 $2k\pi+\frac{\pi}{4}<\theta<2k\pi+\frac{5\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$.

又 $\theta\in[0,2\pi)$，所以 θ 的取值范围是 $\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$.

12. 4　$\left[-\frac{3}{2},3\right]$　【解析】∵ 函数 $f(x)=3\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)(\omega>0)$ 图象的相邻两条对称轴之间的距离为 $\frac{\pi}{4}$,

∴ $f(x)$ 的最小正周期 $T=2\times\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$, 又 $T=\frac{2\pi}{\omega}(\omega>0)$, ∴ $\frac{2\pi}{\omega}=\frac{\pi}{2}$, 解得 $\omega=4$,

∴ $f(x)=3\sin\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)$.

由 $x\in\left[-\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{12}\right]$ 得 $4x+\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$.

当 $4x+\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{6}$, 即 $x=-\frac{\pi}{8}$ 时, $f(x)$ 取得最小值, 最小值为 $3\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{3}{2}$;

当 $4x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$, 即 $x=\frac{\pi}{24}$ 时, $f(x)$ 取得最大值, 最大值为 $3\sin\frac{\pi}{2}=3$.

故 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{12}\right]$ 上的值域为 $\left[-\frac{3}{2},3\right]$.

13. 【解】(1) 由题图可知 $f(x)$ 的最小正周期 $T=2\times\left(\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi}{12}\right)=\pi$,

又 $\omega>0$, 则 $T=\frac{2\pi}{\omega}=\pi$, 解得 $\omega=2$.

因为 $f(x)$ 的图象经过点 $\left(-\frac{\pi}{12},0\right)$, 所以 $f\left(-\frac{\pi}{12}\right)=A\cos\left(-\frac{\pi}{6}+\varphi\right)=0$, 则 $-\frac{\pi}{6}+\varphi=-\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,

解得 $\varphi=2k\pi-\frac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$.

因为 $-\pi<\varphi<0$, 所以 $\varphi=-\frac{\pi}{3}$.

因为 $f(x)$ 的图象经过点 $(0,1)$, 所以 $f(0)=A\cos\left(0-\frac{\pi}{3}\right)=1$, 所以 $A=2$.

所以 $f(x)=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$.

(2) ①因为 $x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$, 所以 $2x-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{2\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$.

当$-\frac{2\pi}{3}\leqslant 2x-\frac{\pi}{3}\leqslant 0$，即$-\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{6}$时，$f(x)$单调递增；

当$0<2x-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{3}$，即$\frac{\pi}{6}<x\leqslant\frac{\pi}{3}$时，$f(x)$单调递减.

因为$f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-1$，$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=2$，$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=1$，所以$1\leqslant m<2$，即$m$的取值范围为$[1,2)$.

②因为关于x的方程$f(x)=m$有两个不等实根，且$-\frac{\pi}{6}\leqslant x_1<x_2\leqslant\frac{\pi}{3}$，

所以$\begin{cases}2x_1-\frac{\pi}{3}+2x_2-\frac{\pi}{3}=0,\\0<2x_2-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{3},\end{cases}$

所以$\frac{4\pi}{3}<x_1+7x_2\leqslant\frac{7\pi}{3}$.

当$x_1+7x_2=\frac{7\pi}{3}$时，$y=5-2\sin(x_1+7x_2)$取得最小值$5-\sqrt{3}$；

当$x_1+7x_2=\frac{3\pi}{2}$时，$y=5-2\sin(x_1+7x_2)$取得最大值7.

专题上分1 正、余弦函数的最值与取值范围问题

1. $\frac{1}{4}-\sqrt{3}$

攻略上分 本题为求形如$y=a\sin^2x+b\sin x+c(a\neq 0,x\in\mathbf{R})$的函数最值问题，具体可见通法攻略10中的类型三.

【解析】令$t=\sin x$，$-1\leqslant t\leqslant 1$，

$y=-t^2+\sqrt{3}t+\frac{5}{4}=-\left(t-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+2$，

结合二次函数图象知，当$t=-1$，

即$x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$时，$y$有最小值，

所以$y_{\min}=-1-\sqrt{3}+\frac{5}{4}=\frac{1}{4}-\sqrt{3}$.

2. $\left[\frac{5\pi}{12},\frac{5\pi}{6}\right]$ 【解析】当$x=0$时，$y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$，由$x\in[0,a]$，

可得$2x-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{3},2a-\frac{\pi}{3}\right]$.

函数$y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$在区间$[0,a]$上的

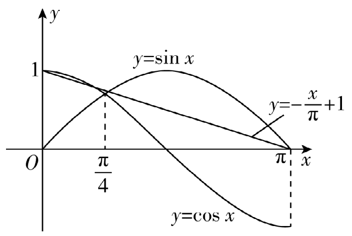
值域为$[-\sqrt{3},2]$，则根据正弦函数的图象知$\frac{\pi}{2}\leqslant 2a-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{4\pi}{3}$，解得$\frac{5\pi}{12}\leqslant a\leqslant\frac{5\pi}{6}$，所以实数 a 的取值范围是$\left[\frac{5\pi}{12},\frac{5\pi}{6}\right]$.

3. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **【解析】**画出函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=-\frac{1}{\pi}x+1$ 在$[0,\pi]$上的大致图象如图.

当 $x=\frac{\pi}{4}$时，$-\frac{1}{\pi}\times\frac{\pi}{4}+1=\frac{3}{4}>\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以$f(x)=\begin{cases}\sin x,0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4},\\ \cos x,\frac{\pi}{4}<x\leqslant\pi,\end{cases}$

则$f(x)_{\max}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以函数 $f(x)$ 在$[0,\pi]$上的最大值是$\frac{\sqrt{2}}{2}$.



4.【解】(1)函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，依题意有$f(0)=2\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=0$.

$\because 0<\theta<\pi$，$\therefore \theta=\frac{2\pi}{3}$.

故$f(x)=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=-2\sin 2x$，$f(x)$为奇函数，满足题意.

当 $2x=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，即 $x=k\pi+\frac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$时，$f(x)$取最小值$-2$；

当 $2x=2k\pi-\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，即 $x=k\pi-\frac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$时，$f(x)$取最大值 2.

故 $f(x)$ 取最小值-2 时，x 的取值集合为$\left\{x\middle| x=k\pi+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}$；

$f(x)$ 取最大值 2 时，x 的取值集合为$\left\{x\middle| x=k\pi-\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}$.

(2)依题意 $g(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，

令 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant 2x-\frac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi+\frac{3\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}$,

得 $k\pi+\frac{5\pi}{12}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{11\pi}{12}, k\in\mathbf{Z}$.

又 $x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$,

所以其单调递减区间为 $\left[-\frac{\pi}{6},-\frac{\pi}{12}\right]$ 与 $\left[\frac{5\pi}{12},\frac{\pi}{2}\right]$.

5.【解】(1) $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

因为 $f\left(\frac{\pi}{12}\right)=1$, 所以 $\sin\left(\frac{\pi}{6}+\varphi\right)=1$, 即 $\frac{\pi}{6}+\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}$, 所以 $\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{3}, k\in\mathbf{Z}$, 又 $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$, 所以 k 取 0, $\varphi=\frac{\pi}{3}$.

(2) 由(1)知, $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

因为 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, 所以 $2x+\frac{\pi}{3}\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right]$.

因为 $y=\sin x$ 在 $\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增, 在 $\left[\frac{\pi}{2},\frac{4\pi}{3}\right]$ 上单调递减, 所以当 $2x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$, 即 $x=\frac{\pi}{12}$ 时, $f(x)$ 取得最大值 1.

因为 $\sin\frac{\pi}{3}>\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以当 $2x+\frac{\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}$, 即 $x=\frac{\pi}{2}$ 时, $f(x)$ 取得最小值 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(3) 由 $f(x)\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$ 得 $\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$,

所以 $2k\pi+\frac{\pi}{4}\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi+\frac{3\pi}{4}, k\in\mathbf{Z}$, 所以 $k\pi-\frac{\pi}{24}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{5\pi}{24}, k\in\mathbf{Z}$.

又 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, 所以 k 只能取 0, 得 $-\frac{\pi}{24}\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{24}$, 即 x 的取值构成的集合为 $\left\{x\,\middle|\,-\frac{\pi}{24}\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{24}\right\}$.

专题上分 2　根据性质求函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的参数

1. D

攻略上分　本题为已知函数在给定区间上单调递减求参数问题，具体可见大招攻略 11 中的 1.

【解析】由 $\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant\omega x-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，得到 $\frac{\frac{5\pi}{6}+2k\pi}{\omega}\leqslant x\leqslant\frac{\frac{11\pi}{6}+2k\pi}{\omega}$，$k\in\mathbf{Z}$，

又因为 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 上单调递减，所以 $\begin{cases}\frac{\frac{5\pi}{6}+2k\pi}{\omega}\leqslant\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z}),\\ \pi\leqslant\frac{\frac{11\pi}{6}+2k\pi}{\omega}(k\in\mathbf{Z}),\end{cases}$

得到 $\frac{5}{3}+4k\leqslant\omega\leqslant\frac{11}{6}+2k$，$k\in\mathbf{Z}$，又 $\frac{\pi}{|\omega|}\geqslant\frac{\pi}{2}$，$\omega>0$，即 $0<\omega\leqslant2$，

所以 $\frac{5}{3}\leqslant\omega\leqslant\frac{11}{6}$，**故 D 正确.**

2. B　【解析】若 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{3\pi}{4}\right)$ 上单调递增，则可得 $\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{6}=\frac{7\pi}{12}\leqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{|\omega|}$，又 $\omega>0$，所以 $0<\omega\leqslant\frac{12}{7}$，而 $0<\varphi<\pi$，

则有 $0<\frac{\pi}{6}\omega+\varphi<\frac{2\pi}{7}+\pi<\frac{3\pi}{2}$，由 $y=\sin x$ 的图象与性质知 $0<\frac{\pi}{6}\omega+\varphi<\frac{\pi}{2}$，

又 $\omega>0$，所以 $\frac{3\pi}{4}\omega+\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$，

又 $\varphi>0$，则有 $\begin{cases}\frac{\pi}{6}\omega<\frac{\pi}{2},\\ \frac{3\pi}{4}\omega<\frac{\pi}{2},\end{cases}$ 所以 $0<\omega<\frac{2}{3}$，

故必要性成立；

若 $0<\omega<\frac{2}{3}$，当 $\frac{\pi}{6}<x<\frac{3\pi}{4}$ 时，$0<\omega x<\frac{\pi}{2}$，

存在 $\varphi\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，使 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{3\pi}{4}\right)$ 上不单调，$\frac{3\pi}{4}\omega+\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$ 无法成立，故充分性

不成立.

故 B 正确.

3. $\left[\frac{2}{3},\frac{3}{2}\right]\cup\left[\frac{10}{3},\frac{7}{2}\right]$　【解析】因为 $\frac{3\pi}{4}\leqslant x\leqslant\pi,\omega>0$,所以$\frac{3\pi}{4}\omega\leqslant\omega x\leqslant\omega\pi$,又函数 $y=\sin\omega x(\omega>0)$ 在$\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]$上单调递减,

设其最小正周期为 T,则$\frac{1}{2}T\geqslant\pi-\frac{3\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$,即$\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{\omega}\geqslant\frac{\pi}{4}$,则 $0<\omega\leqslant4$,

所以$\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant\frac{3\pi}{4}\omega\leqslant\omega x\leqslant\omega\pi\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,

即$\begin{cases}\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant\frac{3\pi}{4}\omega(k\in\mathbf{Z}),\\ \omega\pi\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z}),\end{cases}$

解得$\begin{cases}\frac{2}{3}+\frac{8}{3}k\leqslant\omega(k\in\mathbf{Z}),\\ \omega\leqslant\frac{3}{2}+2k(k\in\mathbf{Z}),\end{cases}$

当 $k=0$ 时,$\frac{2}{3}\leqslant\omega\leqslant\frac{3}{2}$,当 $k=1$ 时,$\frac{10}{3}\leqslant\omega\leqslant\frac{7}{2}$.

故 ω 的取值范围为 $\left[\frac{2}{3},\frac{3}{2}\right]\cup\left[\frac{10}{3},\frac{7}{2}\right]$.

4. D　【解析】$f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}+\varphi\right)$是奇函数,则只需$\frac{\pi}{4}+\varphi=k\pi,k\in\mathbf{Z}$,

所以 $\varphi=k\pi-\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}$,所以 $k=1$ 时,$\varphi=\frac{3\pi}{4}$. **故 D 正确.**

5. C　【解析】$\because f(x)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=0$,

$\therefore f(x)=5\sin(3x+\varphi)$ 的图象关于点$\left(\frac{\pi}{4},0\right)$对称,

$\therefore\frac{3}{4}\pi+\varphi=k\pi,k\in\mathbf{Z}$,即 $\varphi=k\pi-\frac{3}{4}\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,且 $\varphi\in[-3,6]$,解得满足题意的 φ 有$-\frac{3}{4}\pi,\frac{1}{4}\pi,\frac{5}{4}\pi$.

$\therefore$ 所有满足条件的 φ 之和为$\frac{3}{4}\pi$. **故 C 正确.**

6. ABC 【解析】因为 $y=2\sin(4x+\varphi)+B$ 为偶函数,

所以 $2\sin(-4x+\varphi)+B=2\sin(4x+\varphi)+B$,

则 $-4x+\varphi+4x+\varphi=\pi+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$,

所以 $\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$, B 为任意实数,

A,B,C **选项均符合题意.**

7. B 【解析】因为函数 $f(x)=2\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)+m$ 满足 $f\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+f\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=2$,

所以函数 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{\pi}{3},1\right)$ 对称,所以 $m=1$,且 $\sin\left(\frac{\pi}{3}\omega+\frac{\pi}{3}\right)=0$,

所以 $\frac{\pi}{3}\omega+\frac{\pi}{3}=k\pi(k\in\mathbf{Z})$,则 $\omega=3k-1$ $(k\in\mathbf{Z})$,

又 $0<\omega<5$,所以 $\omega=2$,所以 $\omega+m=3$. **故 B 正确.**

8. C 【解析】因为函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)(\omega\in\mathbf{N}_+)$ 的图象关于点 $A(x_0,0)$ 对称,

所以 $\sin\left(\omega x_0+\frac{\pi}{4}\right)=0$, 所以 $\omega x_0+\frac{\pi}{4}=k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$, 所以 $x_0=\frac{1}{\omega}\left(k\pi-\frac{\pi}{4}\right)$, $k\in\mathbf{Z}$,

当 $k\leqslant0$ 时,不满足 $x_0\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$;

当 $k=1$ 时, $x_0=\frac{1}{\omega}\cdot\frac{3\pi}{4}\leqslant\frac{\pi}{3}$,所以 $\frac{9}{4}\leqslant\omega$,因为 $\omega\in\mathbf{N}^*$,所以 ω 的最小值为 3;

当 $k=2$ 时, $x_0=\frac{1}{\omega}\cdot\frac{7\pi}{4}\leqslant\frac{\pi}{3}$,所以 $\frac{21}{4}\leqslant\omega$,因为 $\omega\in\mathbf{N}^*$,所以 ω 的最小值为 6.

因为 $x_0=\frac{1}{\omega}\left(k\pi-\frac{\pi}{4}\right)\leqslant\frac{\pi}{3}$, $k\in\mathbf{Z}$,所以 $3\left(k-\frac{1}{4}\right)\leqslant\omega$, $k\in\mathbf{Z}$,

当正整数 k 增大时, ω 的最小值也越来越大,故 ω 的最小值为 3,**故 C 正确.**

9. D 【解析】因为 $f(x)$ 的图象的任意一条对称轴与 x 轴交点的横坐标均不属于区间 $(3\pi,4\pi)$,

所以 $\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{|\omega|}\geqslant4\pi-3\pi$,又 $\omega>\frac{1}{2}$,

所以 $\frac{1}{2}<\omega\leqslant1$,

又 $k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant 3\omega\pi-\frac{\pi}{3}$，且 $k\pi+\pi+\frac{\pi}{2}\geqslant 4\omega\pi-\frac{\pi}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $\frac{6k+5}{18}\leqslant\omega\leqslant\frac{6k+11}{24}$，$k\in\mathbf{Z}$，又 $\frac{1}{2}<\omega\leqslant 1$，

所以 $\begin{cases}\frac{6k+5}{18}>\frac{1}{2},\\ \frac{6k+11}{24}\geqslant\frac{6k+5}{18},\\ \frac{6k+11}{24}\leqslant 1,\end{cases}$ $k\in\mathbf{Z}$，解得 $k=1$ 或 $k=2$.

当 $k=1$ 时，$\frac{11}{18}\leqslant\omega\leqslant\frac{17}{24}$，符合题意；

当 $k=2$ 时，$\frac{17}{18}\leqslant\omega\leqslant\frac{23}{24}$，符合题意.

所以 $\omega\in\left[\frac{11}{18},\frac{17}{24}\right]\cup\left[\frac{17}{18},\frac{23}{24}\right]$. **故 D 正确.**

10. A 【解析】由题意得 $f(0)=2\sin\varphi=1$，

由题图及 $|\varphi|<\pi$ 得 $\varphi=\frac{5\pi}{6}$.

因为 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(-\frac{\pi}{6},0\right)$ 对称，所以 $f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\omega+\frac{5\pi}{6}\right)=0$，

令 $-\frac{\pi}{6}\omega+\frac{5\pi}{6}=n\pi$，$n\in\mathbf{Z}$，则 $\omega=5-6n$，$n\in\mathbf{Z}$，

令 $\frac{\pi}{2}+2k\pi<\omega x+\frac{5\pi}{6}<\frac{3\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

则 $-\frac{\pi}{3\omega}+\frac{2k\pi}{\omega}<x<\frac{2\pi}{3\omega}+\frac{2k\pi}{\omega}$，$k\in\mathbf{Z}$，

所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left(-\frac{\pi}{3\omega}+\frac{2k\pi}{\omega},\frac{2\pi}{3\omega}+\frac{2k\pi}{\omega}\right)$，$k\in\mathbf{Z}$，

因为 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{3},\frac{14\pi}{33}\right)$ 上单调递减，

所以 $\begin{cases}-\frac{\pi}{3\omega}+\frac{2k\pi}{\omega}\leqslant\frac{\pi}{3},\\ \frac{14\pi}{33}\leqslant\frac{2\pi}{3\omega}+\frac{2k\pi}{\omega},\end{cases}$ $k\in\mathbf{Z}$，

即 $\begin{cases}\omega\geqslant 6k-1,\\ \omega\leqslant\frac{33k}{7}+\frac{11}{7},\end{cases}$ $k\in\mathbf{Z}$，

则 $0<6k-1\leqslant\frac{33k}{7}+\frac{11}{7}$，

整理得 $\frac{1}{6}<k\leqslant 2$.

当 $k=1$ 时，$5\leqslant\omega\leqslant\frac{44}{7}$，当 $k=2$ 时，$\omega=11$，

又 $\omega=5-6n,n\in\mathbf{Z}$，所以 $\omega=5$ 或 11.

故 A 正确.

11. AD 【解析】$f(x)=\sin\left[\omega\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right]$ $(\omega>0)$，当 $x\in(0,\pi)$ 时，$\frac{\pi\omega}{6}<\omega\left(x+\frac{\pi}{6}\right)<\frac{7\pi\omega}{6}$，

因为 $f(x)$ 在区间 $(0,\pi)$ 上有且仅有 2 个最小值点，设函数 $f(x)$ 的最小正周期为 T，则 $\begin{cases}T<\pi,\\3T\geqslant\pi,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\frac{2\pi}{\omega}<\pi,\\3\times\frac{2\pi}{\omega}\geqslant\pi,\end{cases}$

则 $2<\omega\leqslant6$，所以 $\frac{\pi}{3}<\frac{\omega\pi}{6}\leqslant\pi$，

则 $\frac{7\pi}{2}<\frac{7\omega\pi}{6}\leqslant\frac{11\pi}{2}$，解得 $3<\omega\leqslant\frac{33}{7}$.

综上，$\omega\in\left(3,\frac{33}{7}\right]$，**故 A 正确.**

当 $\omega=\frac{33}{7}$，$x\in(0,\pi)$ 时，$\frac{11\pi}{14}<\omega\left(x+\frac{\pi}{6}\right)<\frac{11\pi}{2}$，因为 $y=\sin x$ 的零点为 $k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

所以此时 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上有 5 个零点，

故 B 错误.

当 $\omega=\frac{31}{10}$，$x\in(0,\pi)$ 时，$\frac{31\pi}{60}<\omega\left(x+\frac{\pi}{6}\right)<\frac{217\pi}{60}$，因为 $y=\sin x$ 在 $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$ 处取得最大值，

所以此时 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上只有 1 个最大值点，**故 C 错误.**

因为 $3<\omega\leqslant\frac{33}{7}$，当 $x\in\left(0,\frac{5\pi}{33}\right)$ 时，$\omega\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$，

因为 $y=\sin x$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ 上单调递减，

且 $\omega>0$，所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{5\pi}{33}\right)$ 上单调递减，**故 D 正确.**

12. BCD 【解析】由于函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$，$f\left(-\frac{\pi}{8}\right)=0$，$f(x)\leqslant\left|f\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right|$ 恒成立，

故 $-\frac{\pi}{8}\omega+\varphi=k_1\pi, k_1\in\mathbf{Z}$①，$\frac{3\pi}{8}\omega+\varphi=\frac{\pi}{2}+k_2\pi, k_2\in\mathbf{Z}$②，

由①式和②式可得 $\omega=2(k_2-k_1)+1$，$\varphi=\frac{\pi}{8}+\frac{3k_1+k_2}{4}\pi, k_1, k_2\in\mathbf{Z}$，

故 ω 为奇数，$\varphi\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbf{Z}$，即 $f(x)$ 不可能为偶函数，**故 A 错误，C 正确；**

由题意可知 $f(x)\leqslant\left|f\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right|$，即直线 $x=\frac{3\pi}{8}$ 为函数 $f(x)$ 图象的一条对称轴，

故 $f\left(\frac{\pi}{8}\right)=f\left(\frac{5\pi}{8}\right)$，**故 B 正确；**

$f(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{24}\right)$ 上单调，故 $\frac{\pi}{24}-\left(-\frac{\pi}{12}\right)\leqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{\omega}$，则 $0<\omega\leqslant 8$，

又 ω 为奇数，$0<\omega\leqslant 8$，

当 $\omega=1$ 时，由 A 选项分析可知，$k_1=k_2, k_1, k_2\in\mathbf{Z}$，$\varphi=\frac{\pi}{8}+k\pi, k\in\mathbf{Z}$，

$f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{8}+k\pi\right), k\in\mathbf{Z}$，

当 $x\in\left(-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{24}\right)$ 时，$x+\frac{\pi}{8}+k\pi\in\left(\frac{\pi}{24}+k\pi,\frac{\pi}{6}+k\pi\right), k\in\mathbf{Z}$，由于 $y=\sin x$ 在 $\left(\frac{\pi}{24}+k\pi,\frac{\pi}{6}+k\pi\right), k\in\mathbf{Z}$ 上单调，故 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{24}\right)$ 上单调，符合题意，

故 ω 的最小值为 1，**故 D 正确.**

13. A 【解析】函数 $f(x)=2\cos(2x+\varphi)-1$ 的一个零点是 $\frac{\pi}{4}$，则有 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\cos\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)-1=0$，

即 $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)=\frac{1}{2}$，则 $\frac{\pi}{2}+\varphi=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，即 $\varphi=\pm\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，

所以当 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$ 时，$|\varphi|$ 有最小值 $\frac{\pi}{6}$.

故 A 正确.

14. C 【解析】由 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{2\pi}{5},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增，

得$\begin{cases}-\dfrac{2\pi}{5}\omega\geqslant-\dfrac{\pi}{2},\\ \dfrac{\pi}{2}\omega\leqslant\dfrac{\pi}{2},\end{cases}$

即$\begin{cases}\omega\leqslant\dfrac{5}{4},\\ \omega\leqslant 1,\end{cases}$又 $\omega>0$,所以 $0<\omega\leqslant 1$.

因为在区间$\left[-\dfrac{\pi}{6},2\pi\right]$上,方程 $|f(x)|=1$ 恰好有两个不同的解,且 $f(x)$在区间$\left[-\dfrac{2\pi}{5},\dfrac{\pi}{2}\right]$上单调递增,

当 $x\in\left[-\dfrac{\pi}{6},0\right]$时,$\omega x\in\left[-\dfrac{\pi}{6}\omega,0\right]$,

$|f(x)|=1$ 无解,所以$\dfrac{3\pi}{2}\leqslant 2\pi\omega<\dfrac{5\pi}{2}$,又 $0<\omega\leqslant 1$,故$\dfrac{3}{4}\leqslant\omega\leqslant 1$. **故选 C.**

15. D 【解析】$f(x)=\cos\left(\omega x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 在$[0,1]$上有三个零点,令 $t=\omega x+\dfrac{\pi}{6}$,$y=\cos t$,$t\in\left[\dfrac{\pi}{6},\omega+\dfrac{\pi}{6}\right]$,

即 $y=\cos t$ 在$\left[\dfrac{\pi}{6},\omega+\dfrac{\pi}{6}\right]$上有三个零点.

由余弦函数的图象知$\dfrac{5\pi}{2}\leqslant\omega+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{7\pi}{2}$,

解得$\dfrac{7\pi}{3}\leqslant\omega<\dfrac{10\pi}{3}$.

故 D 正确.

16. C 【解析】当 $x\in\left(0,\dfrac{5\pi}{6}\right)$ 时,$\omega x+\dfrac{\pi}{3}\in\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{5\pi}{6}\omega+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

因为$f(x)$在$\left(0,\dfrac{5\pi}{6}\right)$上只有 1 个零点,

所以 $\pi<\dfrac{5\pi}{6}\omega+\dfrac{\pi}{3}\leqslant 2\pi$,解得$\dfrac{4}{5}<\omega\leqslant 2$.

当 $x\in\left(-\dfrac{2\pi}{3},\dfrac{\pi}{6}\right)$时,$\omega x+\dfrac{\pi}{3}\in\left(-\dfrac{2\pi}{3}\omega+\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{6}\omega+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

因为$\dfrac{4}{5}<\omega\leqslant 2$,所以$-\pi\leqslant-\dfrac{2\pi}{3}\omega+\dfrac{\pi}{3}<-\dfrac{\pi}{5}$.

又因为$f(x)$在$\left(-\dfrac{2\pi}{3},\dfrac{\pi}{6}\right)$上单调递增,

所以$\begin{cases}-\dfrac{\pi}{2}\leqslant-\dfrac{2\pi}{3}\omega+\dfrac{\pi}{3},\\ \dfrac{\pi}{6}\omega+\dfrac{\pi}{3}\leqslant\dfrac{\pi}{2},\end{cases}$解得 $\omega\leqslant 1$.

综上，$\frac{4}{5}<\omega\leq 1$.

故 C 正确.

17. A 【解析】将函数 $f(x)=\sin x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，得到 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象，

再把所得函数图象的横坐标变为原来的 $\frac{1}{\omega}(\omega>0)$ 倍，纵坐标不变，得到函数 $g(x)$ 的图象的解析式为 $g(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$.

当 $x\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$\frac{\pi}{6}\omega+\frac{\pi}{6}<\omega x+\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{2}\omega+\frac{\pi}{6}$，

因为 $g(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$ 上没有零点，所以 $\begin{cases}\frac{\pi}{6}\omega+\frac{\pi}{6}\geq k\pi,\\ \frac{\pi}{2}\omega+\frac{\pi}{6}\leq k\pi+\pi,\end{cases}$ $k\in\mathbf{Z}$，解得 $6k-1\leq\omega\leq 2k+\frac{5}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$，

又 $6k-1\leq 2k+\frac{5}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$，$\omega>0$，所以 $k=0$，$0<\omega\leq\frac{5}{3}$. **故 A 正确.**

18. 2　$\frac{1}{2}$　【解析】因为 $\omega>0$，且 $x\in[0,2\pi]$，则 $\omega x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},2\pi\omega+\frac{\pi}{6}\right]$，

由题意可得 $4\pi\leq 2\pi\omega+\frac{\pi}{6}<5\pi$，解得 $\frac{23}{12}\leq\omega<\frac{29}{12}$.

又因为直线 $x=\frac{\pi}{6}$ 为函数 $f(x)$ 图象的一条对称轴，

则 $\frac{\pi}{6}\omega+\frac{\pi}{6}=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $\omega=6k+2$，$k\in\mathbf{Z}$，

可知 $k=0$，$\omega=2$，即 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，

所以 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$.

§7　正切函数

7.1　正切函数的定义+

7.2　正切函数的诱导公式

对点上分

1. D　【解析】由题意,根据三角函数的定义,得 $\tan\alpha=\dfrac{-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{1}{2}}=-\sqrt{3}$. **故 D 正确.**

2. C　【解析】由题意, $\cos\alpha=\dfrac{m}{\sqrt{m^2+25}}=\dfrac{12}{13}$,解得 $m=12$(负值舍去),所以 $\tan\alpha=-\dfrac{5}{12}$. **故 C 正确.**

3. C　【解析】由题意,角 θ 的终边经过点 $M(m,3-m)$, $\tan\theta=\dfrac{1}{2}=\dfrac{3-m}{m}$,解得 $m=2$.

故 C 正确.

4. D　【解析】因为 $\alpha\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$,所以 $\cos\alpha>0,\tan\alpha<0$,

所以点 $(\cos\alpha,\tan\alpha)$ 在第四象限.

故 D 正确.

方法总结 解答本题的关键是明确三角函数值在各象限的符号,可简记为"一全正,二正弦,三正切,四余弦".

5. D　【解析】$\because 270°<300°<360°$,

$\therefore \tan 300°<0$,**故 A 不符合题意;**

$\because 180°<240°<270°$, $\therefore \sin 240°<0$,**故 B 不符合题意;**

$\because \dfrac{\pi}{2}<2<\pi$, $\therefore \cos 2<0$,**故 C 不符合题意;**

$\because -2\pi<-\dfrac{5\pi}{3}<-\dfrac{3\pi}{2}$, $\therefore \sin\left(-\dfrac{5\pi}{3}\right)>0$,**故 D 符合题意.**

6. B　【解析】若 θ 为第二象限角,则 $\sin\theta>0,\tan\theta<0$,此时 $\sin\theta\cdot\tan\theta<0$;

若 $\sin\theta\cdot\tan\theta<0$,则 θ 为第二象限角或第三象限角,所以"θ 为第二象限角"是"$\sin\theta\cdot\tan\theta<0$"的充分不必要条件. **故 B 正确.**

7. B　【解析】因为 $\sin\alpha<0,\tan\alpha<0$,所以 α 是第四象限角,

即$-\frac{\pi}{2}+2k\pi<\alpha<2k\pi, k\in\mathbf{Z}$,

则$-\frac{\pi}{4}+k\pi<\frac{\alpha}{2}<k\pi, k\in\mathbf{Z}$.

当 $k=2n, n\in\mathbf{Z}$ 时,$-\frac{\pi}{4}+2n\pi<\frac{\alpha}{2}<2n\pi$, $n\in\mathbf{Z}$,此时$\frac{\alpha}{2}$在第四象限;

当 $k=2n+1, n\in\mathbf{Z}$ 时,$\frac{3\pi}{4}+2n\pi<\frac{\alpha}{2}<\pi+2n\pi, n\in\mathbf{Z}$,此时$\frac{\alpha}{2}$在第二象限.

所以$\frac{\alpha}{2}$是第二象限角或第四象限角.

故 B 正确.

8. D 【解析】$\tan\left(-\frac{16\pi}{3}\right)=\tan\left(\frac{2\pi}{3}-6\pi\right)=\tan\frac{2\pi}{3}=\tan\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\tan\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$. **故 D 正确.**

9. A 【解析】$\tan 210°+\sin 300°=\tan(180°+30°)+\sin(360°-60°)=\tan 30°-\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{6}$.

故 A 正确.

10. A 【解析】原式$=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)\cdot\tan\left(-\pi-\frac{\pi}{3}\right)$

$=-\sin\frac{\pi}{3}\cdot\left(-\cos\frac{\pi}{6}\right)\cdot\left(-\tan\frac{\pi}{3}\right)$

$=-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times(-\sqrt{3})$

$=-\frac{3\sqrt{3}}{4}$. **故 A 正确.**

11. A 【解析】由 $\tan(\pi+\alpha)=2$ 得 $\tan\alpha=2$, 则 $\frac{\sin(\alpha-\pi)+\cos(\pi-\alpha)}{\sin(\pi+\alpha)-\cos(\pi+\alpha)}=\frac{-\sin\alpha-\cos\alpha}{-\sin\alpha-(-\cos\alpha)}=\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{\tan\alpha+1}{\tan\alpha-1}=3$. **故 A 正确.**

12. A 【解析】$\tan\left(-\alpha-\frac{4\pi}{3}\right)=-5$,

$\therefore \tan\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=\tan\left[-\pi-\left(-\alpha-\frac{4\pi}{3}\right)\right]=-\tan\left[\pi+\left(-\alpha-\frac{4\pi}{3}\right)\right]=-\tan\left(-\alpha-\frac{4}{3}\pi\right)=5$,**故 A 正确.**

13. $\sin\alpha\cos\alpha$ 【解析】$\frac{\sin(\pi+\alpha)}{\tan(\pi-\alpha)}\cdot$

$\frac{\cos(2\pi-\alpha)}{\sin(-\alpha)}\cdot\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\tan(\pi+\alpha)=\frac{-\sin\alpha}{-\tan\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha}\cdot(-\sin\alpha)\cdot\tan\alpha=\sin\alpha\cos\alpha.$

7.3 正切函数的图象与性质

对点上分

1. D 【解析】因为 $f(x)=3x^3-\tan x$，所以 $f(-x)=-3x^3+\tan x=-f(x)$，

从而当 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$f(x)$ 的图象关于原点对称，**所以排除选项 A 和 C.**

又当 x 趋向于 $\frac{\pi}{2}$ 时，$3x^3$ 趋向于 $\frac{3\pi^3}{8}$，$\tan x$ 趋向于 $+\infty$，所以当 x 趋向于 $\frac{\pi}{2}$ 时，$f(x)$ 趋向于 $-\infty$，**所以排除选项 B. 故 D 正确.**

2. C 【解析】由题意，令 $2x-\frac{\pi}{4}=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{3\pi}{8}$，$k\in\mathbf{Z}$.

当 $k=0$ 时，$x=\frac{3\pi}{8}$，所以直线 $x=\frac{3\pi}{8}$ 与函数 $y=\tan\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象不相交.

故 C 正确.

3. $\left\{x\,\middle|\,k\pi+\frac{\pi}{4}<x<k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$

【解析】对于函数 $f(x)=\lg(\tan x-1)$，应有 $\tan x-1>0$，即 $\tan x>1$，解得 $k\pi+\frac{\pi}{4}<x<k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，

所以 $f(x)=\lg(\tan x-1)$ 的定义域为 $\left\{x\,\middle|\,k\pi+\frac{\pi}{4}<x<k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$

4. $\frac{7}{4}$ 【解析】令 $\tan x=t$，因为 $x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$，所以 $t\in[-1,1]$，

则 $y=t^2-t=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$，图象的对称轴为直线 $t=\frac{1}{2}$，所以 $y=t^2-t$ 在 $t\in\left[-1,\frac{1}{2}\right]$ 上单调递减，在 $t\in\left(\frac{1}{2},1\right]$ 上单调递增，

所以当 $t=-1$ 时，$y_{\max}=2$，当 $t=\frac{1}{2}$ 时，$y_{\min}=-\frac{1}{4}$，

函数 $f(x)=\tan^2x-\tan x$ 的最大值与最小值之和为 $2-\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$.

5. C　【解析】若 $x=0$ 在定义域内，由 $x=0$ 时，$y=0$ 得，$\varphi=k\pi(k\in\mathbf{Z})$；

若 $x=0$ 不在定义域内，由 $x=0$ 时，$\tan\varphi$ 无意义，得 $\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

综上，$\varphi=\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$. **故 C 正确.**

6. C　【解析】将 $y=\tan 2x$ 的图象向右平移 $\frac{2\pi}{3}$ 个单位长度得到 $y=\tan\left[2\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)\right]=\tan\left(2x-\frac{4\pi}{3}\right)=\tan\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象，再将 $y=\tan\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象向上平移 1 个单位长度得到 $y=\tan\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+1$ 的图象，**故 A 错误；**

由 $2x-\frac{2\pi}{3}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，解得 $x\neq\frac{7\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，即 $f(x)$ 的定义域为 $\left\{x\,\middle|\,x\neq\frac{7\pi}{12}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$，则 $y=|f(x)|$ 的定义域为 $\left\{x\,\middle|\,x\neq\frac{7\pi}{12}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$，定义域不关于原点对称，所以 $y=|f(x)|$ 为非奇非偶函数，**故 B 错误；**

因为 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\tan\left(2\times\frac{\pi}{3}-\frac{2\pi}{3}\right)+1=1$，所以函数 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{\pi}{3},1\right)$ 对称，**故 C 正确；**

函数 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{\pi}{2}$，**故 D 错误.**

7. B　【解析】$-a=\tan 1>1$，$-b=\tan 2=-\tan(\pi-2)<0$，$-c=\tan 3=-\tan(\pi-3)<0$. 再根据 $\frac{\pi}{2}>\pi-2>\pi-3>0$，

可得 $\tan(\pi-2)>\tan(\pi-3)>0$，所以 $-\tan(\pi-2)<-\tan(\pi-3)<0$.

综上可得，$-a>0>-c>-b$，即 $a<0<c<b$，**故 B 正确.**

方法总结　比较三角函数值大小的步骤：①异名函数化为同名函数；②利用诱导公式把角转化到同一单调区间上；③利用函数的单调性比较大小.

8. A 【解析】$\because \tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)<1$,

$\therefore -\frac{\pi}{2}+k\pi<x+\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{4}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

即$-\frac{5\pi}{6}+k\pi<x<-\frac{\pi}{12}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

$\therefore$ 不等式 $\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)<1$ 的解集为 $\left(-\frac{5\pi}{6}+k\pi,-\frac{\pi}{12}+k\pi\right)(k\in\mathbf{Z})$.

故 A 正确.

9. C 【解析】令 $-\frac{\pi}{2}+k\pi<2x-\varphi<\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbf{Z}$,

解得 $\frac{k\pi+\varphi-\frac{\pi}{2}}{2}<x<\frac{k\pi+\varphi+\frac{\pi}{2}}{2}, k\in\mathbf{Z}$,

因为函数 $f(x)$ 的单调递增区间是 $\left(\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{6},\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)(k\in\mathbf{Z})$，且 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以

$\begin{cases}\varphi-\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{3},\\ \varphi+\frac{\pi}{2}=\frac{2\pi}{3},\end{cases}$ 解得 $\varphi=\frac{\pi}{6}$.

故 C 正确.

方法总结 判断正切型函数的单调性或求单调区间时，只需要记住 $y=\tan x$ 的单调递增区间为 $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right), k\in\mathbf{Z}$，整体代入 $\omega x+\varphi$ 解出 x 的取值范围，同时考虑 $A\omega$ 的正负对单调性的影响：当 $A\omega>0$ 时，函数有单调递增区间；当 $A\omega<0$ 时，函数有单调递减区间.

10. $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{6}\right](k\in\mathbf{Z})$

【解析】因为 $f(x)=\sqrt{1-\sqrt{3}\tan x}$，所以 $1-\sqrt{3}\tan x\geqslant 0$，则 $\tan x\leqslant\frac{\sqrt{3}}{3}$，解得 $k\pi-\frac{\pi}{2}<x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{6}, k\in\mathbf{Z}$.

当 $x\in\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{6}\right](k\in\mathbf{Z})$ 时，$y=\sqrt{3}\tan x$ 单调递增，所以 $y=\sqrt{1-\sqrt{3}\tan x}$ 单调递减，即 $f(x)=\sqrt{1-\sqrt{3}\tan x}$ 的单调递减区间为 $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{6}\right](k\in\mathbf{Z})$.

11. $\frac{\pi}{3}$ 【解析】取$-\frac{\pi}{2}<2x<\frac{\pi}{2}$,解得$-\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{4}$,所以 $y=\tan 2x$ 在$\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$上单调递增,即 $f(x)=a-\sqrt{3}\tan 2x$ 在$\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$上单调递减,因为$f(x)$在闭区间$\left[-\frac{\pi}{6},b\right]$上有最大值 7,最小值 3,

所以$-\frac{\pi}{6}<b<\frac{\pi}{4}$,且$f(b)=3,f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=7$,即$\begin{cases}a-\sqrt{3}\tan 2b=3,\\ a-\sqrt{3}\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)=7,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=4,\\ b=\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}.\end{cases}$

因为$-\frac{\pi}{6}<b<\frac{\pi}{4}$,所以 $b=\frac{\pi}{12}$,

故 $ab=\frac{\pi}{3}$.

§7 节测上分

1. D 【解析】$\cos 330°+\tan 600°$

$=\cos(360°-30°)+\tan(540°+60°)$

$=\cos 30°+\tan 60°$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$,**故选 D.**

2. AC 【解析】对于函数 $y=\sin 2x$,满足①在$\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$上单调递增;②为奇函数;③最小正周期为$\frac{2\pi}{2}=\pi$,**故 A 正确.**

对于函数 $y=\cos 2x$ 在$\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$上单调递减,为偶函数,最小正周期为$\frac{2\pi}{2}=\pi$,**故 B 错误.**

对于函数 $y=\tan x$ 满足①在$\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$上单调递增;②为奇函数;③最小正周期为$\pi$,**故 C 正确.**

对于函数 $y=\tan 2x$ 在$\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$上单调递增,为奇函数,最小正周期为$\frac{\pi}{2}$,**故 D 错误.**

3. D 【解析】因为 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$,$f\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)=$

$f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\tan\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$，所以$f\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)\neq f\left(\frac{\pi}{6}\right)$，**故 A 错误**；

当$x\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$时，$f(x)=-\tan x$，则函数$f(x)$在区间$\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$上单调递减，**故 B 错误**；

由于$f(-x)=\tan[-(-x)]=-\tan(-x)=-f(x)$，因此函数$f(x)$是奇函数，不是偶函数，**故 C 错误**；

对于 D，$f(2\ 024\pi)=\tan(-2\ 024\pi)=-\tan(2\ 024\pi)=0$，因此，函数$f(x)$的图象关于点$(2\ 024\pi,0)$对称，**故 D 正确.**

4. D 【解析】$a=\tan 29°=\frac{\sin 29°}{\cos 29°}>\sin 29°=b$，

由函数$y=\tan x$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增，

得$a=\tan 29°<\tan 30°=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

由函数$y=\cos x$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递减

得$c=\cos 29°>\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以$c>\frac{\sqrt{3}}{2}>\frac{\sqrt{3}}{3}>a>b$，即$c>a>b$.

故 D 正确.

5. B 【解析】设函数$f(x)$的最小正周期为T，由题图可知$\frac{T}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}$，则$T=\frac{2\pi}{3}$，又$\omega>0$，所以$\omega=\frac{\pi}{T}=\frac{3}{2}$.

把点$\left(\frac{\pi}{2},0\right)$的坐标代入函数$f(x)$的解析式得$\tan\left(\frac{3}{2}\times\frac{\pi}{2}+\varphi\right)=0$，所以$\frac{3\pi}{4}+\varphi=k\pi(k\in\mathbf{Z})$，即$\varphi=k\pi-\frac{3\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$，

因为$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以取$k=1$得$\varphi=\frac{\pi}{4}$，

所以$f(x)=\tan\left(\frac{3}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)$，则$f\left(\frac{5\pi}{18}\right)=\tan\left(\frac{3}{2}\times\frac{5\pi}{18}+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\frac{2\pi}{3}=-\sqrt{3}$. **故 B 正确.**

6. AB 【解析】函数$f(x)=\sin(2\omega x+\varphi)(\omega>0)$的最小正周期是$\frac{2\pi}{2\omega}=\frac{\pi}{\omega}$，**故 A 正确**；

若 α 是第一象限角，则 $\frac{\alpha}{2}$ 是第一象限角或第三象限角，所以 $\tan\frac{\alpha}{2}>0$，**故 B 正确**；

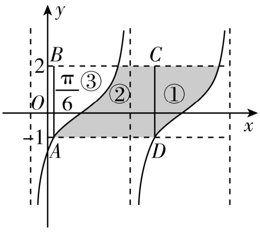
对于函数 $f(x)=\tan\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，令 $2x+\frac{\pi}{6}=\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，得 $x=-\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$，**故 C 错误**；

在 $\triangle ABC$ 中，由 $0<A<\pi$ 知 $\sin A>0$，若 $\sin A\cos B\tan C<0$，

则 $\begin{cases}\cos B>0,\\ \tan C<0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\cos B<0,\\ \tan C>0,\end{cases}$ 所以 C 或 B 为钝角，满足充分性，若 $\triangle ABC$ 是钝角三角形，A 为钝角，则 $\sin A\cos B\tan C>0$，不满足必要性，**故 D 错误**.

7. 2　【解析】设函数 $f(x)$ 的最小正周期为 T，由题意可得 $\frac{T}{2}=\frac{\pi}{4}$，即 $T=\frac{\pi}{2}$，由 $\omega>0$ 得 $\omega=\frac{\pi}{T}=\frac{\pi}{\frac{\pi}{2}}=2$.

8. $f(x)=\tan\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{3}\right)$　【解析】如图所示，区域①和区域③面积相等，故阴影部分的面积即为矩形 $ABCD$ 的面积，



可得 $|AB|=3$，设函数 $f(x)$ 的最小正周期为 T，则 $|AD|=T$，

由题意可得 $3T=6\pi$，解得 $T=2\pi$，故 $\frac{\pi}{\omega}=2\pi(\omega>0)$，可得 $\omega=\frac{1}{2}$，

即 $f(x)=\tan\left(\frac{1}{2}x+\varphi\right)$，

又函数 $f(x)$ 的图象过点 $\left(\frac{\pi}{6},-1\right)$，所以 $\tan\left(\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{6}+\varphi\right)=\tan\left(\frac{\pi}{12}+\varphi\right)=-1$，

因为 $\varphi\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\frac{\pi}{12}+\varphi\in\left(-\frac{5\pi}{12},\frac{7\pi}{12}\right)$，则 $\frac{\pi}{12}+\varphi=-\frac{\pi}{4}$，解得 $\varphi=-\frac{\pi}{3}$. 故 $f(x)=\tan\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{3}\right)$.

9.【证明】(1)左边=

$$\frac{\tan(-\alpha)\sin(-\alpha)\cos(-\alpha)}{\sin\left[2\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]\cos\left[2\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]}$$

$$=\frac{(-\tan\alpha)(-\sin\alpha)\cos\alpha}{\sin\left[-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]\cos\left[-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]}$$

$$=\frac{\sin^2\alpha}{-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$$

$=\frac{\sin^2\alpha}{-\cos\alpha\sin\alpha}=-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\tan\alpha=$右边,所以原等式成立.

(2)左边=

$$\frac{\sin\left[\pi+\left(\frac{8\pi}{7}+\alpha\right)\right]+3\cos\left[\left(\alpha+\frac{8\pi}{7}\right)-3\pi\right]}{\sin\left[4\pi-\left(\alpha+\frac{8\pi}{7}\right)\right]-\cos\left[2\pi+\left(\alpha+\frac{8\pi}{7}\right)\right]}$$

$$=\frac{-\sin\left(\frac{8\pi}{7}+\alpha\right)-3\cos\left(\alpha+\frac{8\pi}{7}\right)}{-\sin\left(\alpha+\frac{8\pi}{7}\right)-\cos\left(\alpha+\frac{8\pi}{7}\right)}$$

$=\frac{\tan\left(\alpha+\frac{8\pi}{7}\right)+3}{\tan\left(\alpha+\frac{8\pi}{7}\right)+1}=\frac{m+3}{m+1}=$右边,所以原等式成立.

一题多解 (2)由 $\tan\left(\alpha+\frac{8\pi}{7}\right)=m$,得 $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{7}\right)=m$,所以等式左边=

$$\frac{\sin\left[2\pi+\left(\frac{\pi}{7}+\alpha\right)\right]+3\cos\left[\left(\alpha+\frac{\pi}{7}\right)-2\pi\right]}{\sin\left[2\pi+\pi-\left(\alpha+\frac{\pi}{7}\right)\right]-\cos\left[2\pi+\pi+\left(\alpha+\frac{\pi}{7}\right)\right]}$$

$$=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{7}+\alpha\right)+3\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{7}\right)}{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{7}\right)+\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{7}\right)}$$

$=\frac{\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{7}\right)+3}{\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{7}\right)+1}=\frac{m+3}{m+1}=$右边,等式成立.

10.【解】(1)根据题意可得 $\frac{\pi}{\omega}\times1=4$,解得 $\omega=\frac{\pi}{4}$,则 $f(x)=\tan\frac{\pi}{4}x$.

由 $-\frac{\pi}{2}+k\pi<\frac{\pi}{4}x<\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$,

得 $-2+4k<x<2+4k(k\in\mathbf{Z})$,即 $f(x)$ 的定义域为 $(-2+4k,2+4k)(k\in\mathbf{Z})$.

(2)由(1)得 $h(x)=3\tan\frac{\pi}{4}x+x^2-4$,其定义域为 $(-2,2)$.

关于 x 的不等式 $h(x)\leqslant 0$,

即 $3\tan\frac{\pi}{4}x+x^2-4\leqslant 0$, 即 $3\tan\frac{\pi}{4}x\leqslant 4-x^2$.

当 $x\in(-2,0]$ 时, $\frac{\pi}{4}x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right]$, 则 $3\tan\frac{\pi}{4}x\leqslant 0$,

因为 $4-x^2>0$, 所以 $3\tan\frac{\pi}{4}x<4-x^2$ 成立.

当 $x\in(0,2)$ 时, 因为函数 $y=3\tan\frac{\pi}{4}x$ 在 $(0,2)$ 上单调递增, 函数 $y=x^2-4$ 在 $(0,2)$ 上单调递增, 所以 $h(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递增, 因为 $h(1)=3\tan\frac{\pi}{4}+1^2-4=0$, 所以当 $0<x\leqslant 1$ 时, $h(x)\leqslant 0$.

综上, 关于 x 的不等式 $h(x)\leqslant 0$ 的解集为 $(-2,1]$.

§8　三角函数的简单应用

对点上分

1. BD 【解析】由题可知小球运动的最小正周期 $T=1.8$ s, 所以 $\frac{2\pi}{\omega}=1.8(\omega>0)$, 解得 $\omega=\frac{10\pi}{9}$, **故 B 正确;**

当 $t=0$ 时, $A\sin\varphi=A$, 则 $\sin\varphi=1$, 又 $\varphi\in(0,\pi]$, 所以 $\varphi=\frac{\pi}{2}$, **故 A 错误;**

由上可知 $h=A\sin\left(\frac{10\pi}{9}t+\frac{\pi}{2}\right)=A\cos\frac{10\pi}{9}t$, 所以 $t=9$ 与 $t=2.1$ 时相对于平衡位置的高度的比为 $\frac{A\cos\left(\frac{10\pi}{9}\times 9\right)}{A\cos\left(\frac{10\pi}{9}\times 2.1\right)}=2$, **故 C 错误, D 正确.**

2. A 【解析】因为 $t_1+t_2=2$, $t_2+t_3=4$, 则 $S(t)$ 的最小正周期 $T=t_3-t_1=2$, $\omega=\frac{2\pi}{2}=\pi$, 由 $t_1+t_2=2$, 可知直线 $t=1$ 是函数 $S(t)$ 图象的一条对称轴, 则 $\pi+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$, 解得 $\varphi=k\pi-\frac{\pi}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$, 易知 φ 的取值不影响单调区间, 不妨取 $\varphi=-\frac{\pi}{2}$, 所以 $S(t)=3\sin\left(\pi t-\frac{\pi}{2}\right)$, $t\geqslant 0$.

令 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant\pi t-\frac{\pi}{2}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{N}$,解得 $2k\leqslant t\leqslant 2k+1, k\in\mathbf{N}$,

可知函数 $S(t)$ 的单调递增区间是 $[2k, 2k+1], k\in\mathbf{N}$.

令 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant\pi t-\frac{\pi}{2}\leqslant 2k\pi+\frac{3\pi}{2}, k\in\mathbf{N}$,解得 $2k+1\leqslant t\leqslant 2k+2, k\in\mathbf{N}$,

可知函数 $S(t)$ 的单调递减区间是 $[2k+1, 2k+2], k\in\mathbf{N}$,所以函数 $S(t)$ 的单调区间为 $[k, k+1], k\in\mathbf{N}$. **故 A 正确.**

3. D 【**解析**】由函数 $y=K\cos(\omega t+\varphi)$ 的图象,可得 $K=2$,最小正周期 $T=4$,

所以 $\omega=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}(\omega>0)$,所以 $y=2\cos\left(\frac{\pi}{2}t+\varphi\right)$.

因为点 $A(0,1)$ 在函数的图象上,所以 $2\cos\varphi=1$,即 $\cos\varphi=\frac{1}{2}$,

又因为 $\varphi\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,所以 $\varphi=\pm\frac{\pi}{3}$,

因为 $t=3$ 时,$y<0$,所以 $\varphi=-\frac{\pi}{3}$,所以 $y=2\cos\left(\frac{\pi}{2}t-\frac{\pi}{3}\right)$.

令 $\frac{\pi}{2}t-\frac{\pi}{3}=k\pi, k\in\mathbf{N}$,则 $t=2k+\frac{2}{3}, k\in\mathbf{N}$,故函数图象在 y 轴右侧的第一条对称轴和第二条对称轴分别为直线 $t=\frac{2}{3}$, $t=\frac{8}{3}$,

令 $t=\frac{2}{3}$,则 $y=2\cos\left(\frac{\pi}{2}\times\frac{2}{3}-\frac{\pi}{3}\right)=2$;

令 $t=\frac{8}{3}$,则 $y=2\cos\left(\frac{\pi}{2}\times\frac{8}{3}-\frac{\pi}{3}\right)=-2$;

令 $t=3$,则 $y=2\cos\left(\frac{\pi}{2}\times 3-\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$,

所以质点在 $\left[0,\frac{2}{3}\right)$, $\left[\frac{2}{3},\frac{8}{3}\right)$, $\left[\frac{8}{3}, 3\right)$ 的路程分别为 $2-1=1$, $2-(-2)=4$, $-\sqrt{3}-(-2)=2-\sqrt{3}$,所以前 3 s 该质点走过的路程为 $(7-\sqrt{3})$ cm. **故 D 正确.**

4. AC

攻略上分 本题以海水的潮汐现象为背景,考查了三角函数在生活中的周期性变化问题中的应用,具体可见通法攻略 12.

【解析】设函数的最小正周期为 T,则依题意得 $\frac{T}{2}=\frac{\pi}{\omega}=6(\omega>0)$,所以 $\omega=\frac{\pi}{6}$,**故 A 正确**;

当 $x=12$ 时,$y=A\cos\left(\frac{\pi}{6}\times12+\frac{\pi}{3}\right)+6=8$,解得 $A=4$,所以易知最高水位为 10 m,**故 B 错误**;

由上可知 $y=4\cos\left(\frac{\pi}{6}x+\frac{\pi}{3}\right)+6$,令 $y\geqslant8$,解得 $8\leqslant x\leqslant12$ 或 $20\leqslant x\leqslant24$,所以从上午 8 点开始首次限制船只出入,一天内限制船只出入的时长为 8 h,**故 C 正确,D 错误**.

5. 12　22.5　【解析】由题可得 $A+B=30$,$B-A=20$,解得 $A=5$,$B=25$,

所以函数 $y=5\cos\left[\frac{\pi}{6}(x-6)\right]+25$,所以函数的最小正周期为 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}}=12$.

令 $x=10$,可得 $y=5\cos\left[\frac{\pi}{6}\times(10-6)\right]+25=22.5$,即 10 月份的月平均气温为 22.5 ℃.

6.【解】(1)依题意 $A=2$,函数的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}=4\times[-1-(-4)]=12(\omega>0)$,

解得 $\omega=\frac{\pi}{6}$,当 $x=-1$ 时,$y=2\sin\left(-\frac{\pi}{6}+\varphi\right)=2$,则 $-\frac{\pi}{6}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,且 $\varphi\in(0,\pi)$,于是 $\varphi=\frac{2\pi}{3}$,所以曲线段 $FGBC$ 对应的函数解析式为 $y=2\sin\left(\frac{\pi}{6}x+\frac{2\pi}{3}\right)$,$x\in[-4,0]$.

(2)令 $2\sin\left(\frac{\pi}{6}x+\frac{2\pi}{3}\right)=1$,$x\in[-4,0]$,

则 $\sin\left(\frac{\pi}{6}x+\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$,由 $x\in[-4,0]$,

得 $\frac{\pi}{6}x+\frac{2\pi}{3}\in\left[0,\frac{2\pi}{3}\right]$,则 $\frac{\pi}{6}x+\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$,

解得 $x=-3$,即点 $G(-3,1)$,所以 $OG=\sqrt{10}$,即景观路 GO 的长度为 $\sqrt{10}$ 千米.

7.【解】(1)设游客坐上摩天轮的时间为 t,不妨设摩天轮逆时针旋转,

则游客距地面的高度 $h(t)=A\sin(\omega t+\varphi)+B$,$A>0$,$\omega>0$,$t\geqslant0$,$|\varphi|<\pi$.

又摩天轮的半径为 45 米,最高点距离地面 100 米,则 $A=45$,$A+B=100$,则 $B=55$,

所以 $h(t)=45\sin(\omega t+\varphi)+55$.

又当 $t=0$ 时, $h(0)=45\sin\varphi+55=100-2\times45=10$, 则 $\sin\varphi=-1$,

解得 $\varphi=-\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$,

则 $h(t)=45\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)+55=45\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)+55, k\in\mathbf{Z}$,

又 $t=5$ 时, $h(5)=45\sin\left(5\omega-\frac{\pi}{2}\right)+55=32.5$, 则 $\sin\left(5\omega-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{2}$,

解得 $\omega=\frac{\pi}{15}+\frac{2k}{5}\pi$ 或 $\omega=-\frac{\pi}{15}+\frac{2k}{5}\pi, k\in\mathbf{Z}$,

又运行一周的时间不低于 20 分钟,

所以 $\frac{2\pi}{\omega}\geqslant20$, 解得 $0<\omega\leqslant\frac{\pi}{10}$,

所以 $\omega=\frac{\pi}{15}$, 所以运行一周所需时间为 $\frac{2\pi}{\omega}=30$(分钟).

(2) 由 (1) 得 $h(t)=45\sin\left(\frac{\pi}{15}t-\frac{\pi}{2}\right)+55$.

令 $h(t)=45\sin\left(\frac{\pi}{15}t-\frac{\pi}{2}\right)+55=77.5$, 则 $\sin\left(\frac{\pi}{15}t-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}$,

则 $t=10+30k$ 或 $t=20+30k, k\in\mathbf{N}$,

又 $0\leqslant t\leqslant30$, 则 $t=10$ 或 $t=20$.

所以摩天轮运行的时间为 10 分钟或 20 分钟.

真题上分

1. $-\frac{1}{2}$ 【解析】$\because \alpha\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$,

$\therefore \cos\frac{\pi}{3}\leqslant\cos\alpha\leqslant\cos\frac{\pi}{6}$,

即 $\frac{1}{2}\leqslant\cos\alpha\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$.

又 $\beta-\alpha=\pi+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$, $\therefore \cos\beta=\cos(\alpha+\pi+2k\pi)=\cos(\alpha+\pi)=-\cos\alpha, k\in\mathbf{Z}$,

$\therefore -\frac{\sqrt{3}}{2}\leqslant\cos\beta\leqslant-\frac{1}{2}$, $\therefore \cos\beta$ 的最大值为 $-\frac{1}{2}$.

2. B 【解析】正切函数 $y=\tan x$ 图象的对称中心为 $\left(\frac{k\pi}{2},0\right)(k\in\mathbf{Z})$. 由点 $(a,0)$

$(a>0)$是函数 $y=2\tan\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象的一个对称中心，可知 $a-\frac{\pi}{3}=\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，即 $a=\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$. 由 $a>0$ 可得，当 $k=0$ 时，a 取得最小值$\frac{\pi}{3}$. **故选 B.**

快解 若 $a=\frac{\pi}{6}$，因为 $\tan\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)=\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)\neq0$，所以 a 不能取$\frac{\pi}{6}$；若 $a=\frac{\pi}{3}$，因为 $\tan\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)=0$，所以 a 能取$\frac{\pi}{3}$；若 $a=\frac{\pi}{2}$，因为 $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=\tan\frac{\pi}{6}\neq0$，所以 a 不能取$\frac{\pi}{2}$；若 $a=\frac{4\pi}{3}$，因为 $\tan\left(\frac{4\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)=0$，所以 a 能取$\frac{4\pi}{3}$. 因为$\frac{\pi}{3}<\frac{4\pi}{3}$，所以 a 的最小值为$\frac{\pi}{3}$. **故选 B.**

3. A 【解析】因为$f(x)$在$\left[-\frac{5\pi}{12},\frac{\pi}{12}\right]$上单调递增，所以$\frac{\pi}{12}-\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\leqslant\frac{T}{2}$，即 $0<\omega\leqslant2$.

因为直线 $x=\frac{\pi}{12}$为$f(x)$图象的一条对称轴，$\left(\frac{\pi}{3},0\right)$为$f(x)$图象的一个对称中心，所以$\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{12}=\frac{T}{4}+\frac{k_1T}{2}(k_1\in\mathbf{N})$，即 $\omega=2(1+2k_1)(k_1\in\mathbf{N})$，故 $\omega=2$，所以 $f(x)=\sin(2x+\varphi)$，又 $f\left(\frac{\pi}{12}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}+\varphi\right)=1$，

提示：$\frac{\pi}{12}$是单调递增区间的右端点，故$f\left(\frac{\pi}{12}\right)=1$

故$\frac{\pi}{6}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k_2\pi(k_2\in\mathbf{Z})$，则 $\varphi=\frac{\pi}{3}+2k_2\pi(k_2\in\mathbf{Z})$.

因为$-\pi<\varphi<\pi$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}$，即 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$时，$2x+\frac{\pi}{3}\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right]$，

所以 $\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\in\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$.

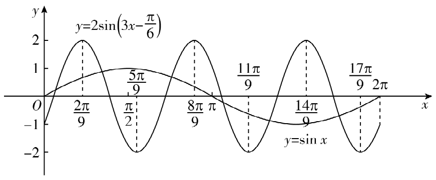
故当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时,$f(x)$ 的最小值为 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **故选 A.**

拓展结论 三角函数中图象的对称轴、对称中心与周期的关系

正弦曲线、余弦曲线相邻的两个对称中心、相邻的两条对称轴之间的距离是$\frac{1}{2}$个周期,相邻的对称中心与对称轴之间的距离是$\frac{1}{4}$个周期;正切曲线相邻两个对称中心之间的距离是$\frac{1}{2}$个周期.

4. C 【解析】令 $3x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k_1\pi,k_1\in\mathbf{Z}$,则 $x=\frac{2\pi}{9}+\frac{k_1\pi}{3},k_1\in\mathbf{Z}$,又 $x\in[0,2\pi]$,所以 $x=\frac{2\pi}{9},\frac{5\pi}{9},\frac{8\pi}{9},\frac{11\pi}{9},\frac{14\pi}{9},\frac{17\pi}{9}$.

令 $3x-\frac{\pi}{6}=k_2\pi,k_2\in\mathbf{Z}$,则 $x=\frac{\pi}{18}+\frac{k_2\pi}{3},k_2\in\mathbf{Z}$,又 $x\in[0,2\pi]$,所以 $x=\frac{\pi}{18},\frac{7\pi}{18},\frac{13\pi}{18},\frac{19\pi}{18},\frac{25\pi}{18},\frac{31\pi}{18}$,如图,作出函数 $y=\sin x$ 与 $y=2\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)$ 在 $[0,2\pi]$ 上的大致图象,由图可知,两函数图象共有 6 个交点. **故选 C.**



5. BC 【解析】对于 A,令 $f(x)=0$,则 $2x=k_1\pi(k_1\in\mathbf{Z})$,解得 $x=\frac{k_1\pi}{2}(k_1\in\mathbf{Z})$,令 $g(x)=0$,则 $2x-\frac{\pi}{4}=k_2\pi(k_2\in\mathbf{Z})$,解得 $x=\frac{\pi}{8}+\frac{k_2\pi}{2}(k_2\in\mathbf{Z})$,因此 $f(x)$ 与 $g(x)$ 无相同零点,**故 A 错误;**

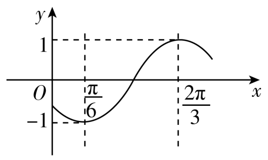
对于 B,$f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大值都为 1,**故 B 正确;**

对于 C,$f(x)$ 与 $g(x)$ 的最小正周期都是 $\frac{2\pi}{2}=\pi$,**故 C 正确;**

对于 D，令 $2x=\frac{\pi}{2}+k_3\pi(k_3\in\mathbf{Z})$，得 $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k_3\pi}{2}(k_3\in\mathbf{Z})$，令 $2x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k_4\pi(k_4\in\mathbf{Z})$，得 $x=\frac{3}{8}\pi+\frac{k_4\pi}{2}(k_4\in\mathbf{Z})$，故 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象无相同的对称轴，**故 D 错误. 故选 BC.**

一题多解 由题可得 $f(x)=\sin 2x$，$g(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$，则将函数 $f(x)=\sin 2x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{8}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 个单位长度可以得到函数 $g(x)$ 的图象. 显然，图象的左右平移变换不改变原函数的周期和最值，**故 B，C 正确**；又平移的长度不是半个周期的整数倍，所以函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 图象的对称中心和对称轴不会重合，**故 A，D 错误. 故选 BC.**

6. D 【解析】由题意画出 $f(x)$ 图象的简图（如图）.



因为函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right)$ 单调递增，且直线 $x=\frac{\pi}{6}$ 和直线 $x=\frac{2\pi}{3}$ 为函数 $y=f(x)$ 的图象的两条对称轴，所以 $\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{T}{2}$，$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=-1$，所以 $T=\pi$，即 $|\omega|=\frac{2\pi}{T}=2$，则 $\omega=2$ 或 -2.

而 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=-1$，

提示：$\frac{\pi}{6}$ 为函数 $f(x)$ 的极小值点

即 $\sin\left(2\times\frac{\pi}{6}+\varphi\right)=-1$ 或 $\sin\left(-2\times\frac{\pi}{6}+\varphi\right)=-1$，所以 $2\times\frac{\pi}{6}+\varphi=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ 或 $-2\times\frac{\pi}{6}+\varphi=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，即 $\varphi=-\frac{5\pi}{6}+2k\pi$ 或 $-\frac{\pi}{6}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，所以 $f(x)=\sin\left(2x-\frac{5\pi}{6}\right)$ 或 $f(x)=\sin\left(-2x-\frac{\pi}{6}\right)$，所以 $f\left(-\frac{5\pi}{12}\right)=\sin\left(-\frac{5\pi}{6}-\frac{5\pi}{6}\right)=$

$\sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $f\left(-\frac{5\pi}{12}\right)=\sin\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，故选 D.

7. A 【解析】因为 $y=f(x)=(3^x-3^{-x})\cos x$，$x\in\mathbf{R}$，所以 $f(-x)=(3^{-x}-3^x)\cos x=-f(x)$，所以函数 $y=f(x)$ 是奇函数，故排除 B，D；

而 $f(1)=(3-3^{-1})\cos 1=\frac{8}{3}\cos 1>0$，

提示：特殊值法

故排除 C，故选 A.

8. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

思路导引

A,B 两点横、纵坐标关系 $\to\omega$
图象与 x,y 轴交点 $\to\varphi$
$\to f(x)\to f(\pi)$

【解析】设 $A\left(x_1,\frac{1}{2}\right)$，$B\left(x_2,\frac{1}{2}\right)$，由五点作图法可得 $\begin{cases}\omega x_1+\varphi=\frac{\pi}{6}, ①\\ \omega x_2+\varphi=\frac{5\pi}{6}. ②\end{cases}$

②−①，得 $\omega(x_2-x_1)=\frac{2\pi}{3}$.

因为 $|AB|=\frac{\pi}{6}$，所以 $x_2-x_1=\frac{\pi}{6}$，所以 $\omega=4$.

因为函数 $f(x)$ 的图象经过点 $\left(\frac{2\pi}{3},0\right)$，所以 $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{8\pi}{3}+\varphi\right)=0$，所以 $\frac{8\pi}{3}+\varphi=2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $\varphi=-\frac{8\pi}{3}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.

由题图可知 $-1<f(0)<0$，即 $-1<\sin\varphi<0$，所以取 $k=1$，则 $\varphi=-\frac{2\pi}{3}$，所以 $f(x)=\sin\left(4x-\frac{2\pi}{3}\right)$，所以 $f(\pi)=\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

素养上分

1. A 【解析】设圆的半径为 r，剪下的扇形的圆心角为 α，则圆面剩余部分的圆心角为 $2\pi-\alpha$，由题意可得 $\frac{\frac{1}{2}\alpha r^2}{\frac{1}{2}(2\pi-\alpha)r^2}=\frac{\alpha}{2\pi-\alpha}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，解得 $\alpha=(3-\sqrt{5})\pi$. 故选 A.

2. CD　【解析】对于 A,因为筒车按逆时针方向每旋转一周用时 60 秒,所以筒车转动的角速度 $\omega=\frac{2\pi}{60}=\frac{\pi}{30}$(弧度/秒),**故 A 错误**;

对于 B,$R=\sqrt{3^2+(-3\sqrt{3})^2}=6$,由 $f(0)=6\sin\varphi=-3\sqrt{3}$ 得 $\sin\varphi=-\frac{\sqrt{3}}{2}$,又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$,所以 $\varphi=-\frac{\pi}{3}$,所以 $y=f(t)=6\sin\left(\frac{\pi}{30}t-\frac{\pi}{3}\right)$,当筒车旋转 50 秒时,$y=f(50)=6\sin\left(\frac{5\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)=-3\sqrt{3}$,**故 B 错误**;

对于 C,由 B 可知当筒车旋转 50 秒时,$y=f(50)=6\sin\left(\frac{5\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)=-3\sqrt{3}$,又 $50<60$,所以此时盛水筒 M 对应的点 P 与 P_0 关于 y 轴对称,这意味着盛水筒 M 和初始点 P_0 的水平距离为 $2x_{P_0}=6$,**故 C 正确**;

对于 D,注意到 $y=f(t)=6\sin\left(\frac{\pi}{30}t-\frac{\pi}{3}\right)\leqslant 6$,且 $f(25)=6\sin\left(\frac{5}{6}\pi-\frac{\pi}{3}\right)=6$,故筒车在 $(0,60]$ 秒的旋转过程中,盛水筒 M 最高点到 x 轴的距离的最大值为 6,**故 D 正确. 故选 CD.**

3. ACD　【解析】因为 $\cot x=\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$,所以 $\frac{\pi}{2}-x\neq n\pi+\frac{\pi}{2}$,$n\in\mathbf{Z}$,所以 $x\neq -n\pi$,令 $k=-n$,则 $x\neq k\pi$,所以函数 $f(x)=\cot x$ 的定义域为 $\{x\mid x\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$,**故 A 正确**;

因为 $\cot x=-\tan\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$,$x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,所以 $x-\frac{\pi}{2}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,故 $y=\tan\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 上单调递增,所以 $f(x)=\cot x$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 上单调递减,**故 B 错误**;

正切曲线 $y=\tan x$ 的对称中心为 $\left(\frac{n\pi}{2},0\right)$,$n\in\mathbf{Z}$,因为 $\cot x=\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{1}{\tan x}$,所以余切函数 $y=\cot x$ 的图象的对称中心也为 $\left(\frac{n\pi}{2},0\right)$,$n\in\mathbf{Z}$,**故 C 正确**;

$y=\cot x=\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\tan\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$，**故 D 正确. 故选 ACD.**

4. B 【解析】依题意，$f(x)=\tan x\sin x-\sin x-\tan x+1=(\tan x-1)(\sin x-1)$，而 $x\in[0,2\pi]$，显然 $x\neq\frac{\pi}{2}$ 且 $x\neq\frac{3\pi}{2}$，因此 $\sin x\neq1$，由 $f(x)=0$，得 $\tan x=1$，解得 $x=\frac{\pi}{4}$ 或 $x=\frac{5}{4}\pi$，所以 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上的零点个数是 2. **故选 B.**

5. 0 或 -1 【解析】函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，

$f\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\sin\left[3\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right]=-\cos x\cos 3x$，$f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sin\left[3\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]=-\cos x\cos 3x$，所以 $f\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$，

所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称.

易得 $f(0)=f(\pi)=0$，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$，

因为关于 x 的方程 $f(x)=a$ 在 $(0,\pi]$ 上有奇数个不同的实数解，

所以 $y=f(x)$ 和 $y=a$ 的图象在 $(0,\pi]$ 上有奇数个不同的交点，

因为 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称，

所以当 $a=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$ 时，$y=f(x)$ 与 $y=a$ 的图象在 $(0,\pi]$ 上有奇数个不同的交点；

因为区间 $(0,\pi]$ 是半开半闭区间，

所以当 $a=f(\pi)=0$ 时，$y=f(x)$ 与 $y=a$ 的图象在 $(0,\pi]$ 上有奇数个不同的交点.

综上，a 的值为 0 或 -1.

第一章 全章上分

1. C 【解析】因为扇形的半径为 1，圆心角为 $\frac{\pi}{6}$，所以该扇形的面积为 $\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{6}\times1^2=\frac{\pi}{12}$. **故 C 正确.**

2. A 【解析】由 $\cos\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{4}{5}$ 可得 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{4}{5}$，所以 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{4}{5}$，**故 A 正确.**

3. A 【解析】因为 $f(-x)=(e^{-x}-e^{x})\cdot\sin(-x)=f(x)$，所以 $f(x)$ 为偶函数，**排除 C；**

因为 $f(0)=0$，**所以排除 D；**

因为当 $x\in(0,\pi)$ 时，$f(x)>0$，**所以排除 B. 故 A 正确.**

4. C 【解析】相遇时间 $t=4\times2\pi\div\left(\frac{\pi}{12}+\frac{11\pi}{12}\right)=8$（秒），故 P 转过的角度为 $\frac{\pi}{12}\times8=\frac{2\pi}{3}$，所以其对应的坐标为 $\left(\cos\frac{2\pi}{3},\sin\frac{2\pi}{3}\right)$，即 $\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. **故 C 正确.**

5. C 【解析】对于 A，$y=\sin\left[\frac{1}{4}\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)\right]=\sin\left(\frac{1}{4}x+\frac{\pi}{3}\right)$，不合题意，**故 A 错误；**

对于 B，$y=\sin\left[\frac{1}{4}\left(x-\frac{4\pi}{3}\right)\right]=\sin\left(\frac{1}{4}x-\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{1}{4}x\right)$，不合题意，**故 B 错误；**

对于 C，$y=\sin\left[\frac{1}{4}\left(x+\frac{8\pi}{3}\right)\right]=\sin\left[\pi-\left(\frac{\pi}{3}-\frac{1}{4}x\right)\right]=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{1}{4}x\right)$，符合题意，**故 C 正确；**

对于 D，$y=\sin\left[\frac{1}{4}\left(x-\frac{8\pi}{3}\right)\right]=\sin\left[\left(\frac{1}{4}x+\frac{\pi}{3}\right)-\pi\right]=-\sin\left(\frac{1}{4}x+\frac{\pi}{3}\right)$，不合题意，**故 D 错误.**

6. B 【解析】若存在 $m,n\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，使函数 $f(x)$ 的图象既关于直线 $x=m$ 对称，又关于点 $(n,0)$ 对称，

当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，因为 $\omega>0$，所以 $\omega x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\omega+\frac{\pi}{6}\right]$，

则 $\frac{\pi}{2}\omega+\frac{\pi}{6}\geqslant\pi$，解得 $\omega\geqslant\frac{5}{3}$.

又因为 $[2,+\infty)$ 是 $\left[\frac{5}{3},+\infty\right)$ 的真子集，所以“存在 $m,n\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，使函数 $f(x)$ 的图象既关于直线 $x=m$ 对称，又关于点 $(n,0)$ 对称”是“$\omega\geqslant2$”的必要不充

分条件. **故 B 正确.**

7. D 【解析】由 $y=f(x+2)$ 的图象关于直线 $x=-2$ 对称,知 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称,所以 $f(x)$ 是偶函数.

在 $f(x)=f(x+6)+f(3)$ 中,令 $x=-3$ 得 $f(-3)=f(3)+f(3)=2f(3)$,

又 $f(-3)=f(3)$,所以 $f(3)=0$,所以 $f(x)=f(x+6)$,故 $f(x)$ 是周期为 6 的周期函数.

对于 $\forall x_1,x_2\in[0,3]$,当 $x_1\neq x_2$ 时,$(x_1-x_2)\cdot[f(x_1)-f(x_2)]<0$,

故 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上单调递减,所以 $f(2)>f(3)=0$.

$f(2\ 023)=f(6\times337+1)=f(1)$,

$f(2\ 024)=f(6\times337+2)=f(2)$,

由 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上单调递减得 $f(1)>f(2)$,即 $f(2\ 023)>f(2\ 024)$,**故 D 正确.**

8. B 【解析】设轮子的圆心为点 O,如图,过 A,O 分别作地面的垂线,垂足分别为 A_1,O_1,过 A 作 $AE\perp OO_1$ 于点 E,连接 AO,记 $\angle AOE=\alpha$,当 $x\in\left(k\pi,\frac{\pi}{4}+k\pi\right)$ $(k\in\mathbf{N})$ 时,因为轮子的半径为 0.5,所以 $x=\frac{1}{2}\alpha+k\pi(k\in\mathbf{N})$,得到 $\alpha=2x-2k\pi$ $(k\in\mathbf{N})$,

在 Rt $\triangle AEO$ 中,$OE=OA\cos\alpha=\frac{1}{2}\cos(2x-2k\pi)=\frac{1}{2}\cos 2x$,所以 $AA_1=OO_1-EO=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$.

同理,当 $x\in\left(\frac{\pi}{4}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$ $(k\in\mathbf{N})$ 时(图略),$x=\frac{1}{2}(\pi-\alpha)+k\pi(k\in\mathbf{N})$,得到 $\alpha=-2x+\pi+2k\pi(k\in\mathbf{N})$,在 Rt$\triangle AEO$ 中,$OE=OA\cos\alpha=\frac{1}{2}\cos(-2x+\pi+2k\pi)=-\frac{1}{2}\cos 2x$,所以 $AA_1=OO_1+EO=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$.

当 $x=k\pi(k\in\mathbf{N})$ 时,$f(x)=0$;当 $x=\frac{\pi}{4}+k\pi(k\in\mathbf{N})$ 时,$f(x)=\frac{1}{2}$;当 $x=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{N})$ 时,$f(x)=1$,均满足 $f(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$.

结合圆的几何特征,易得 $f(x)=\frac{1}{2}-$

$\frac{1}{2}\cos 2x(x\geqslant 0)$.

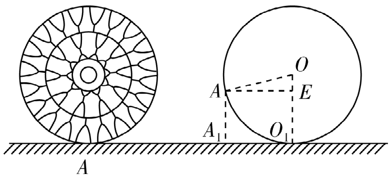
当 $x=2\ 023$ 时，$f(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\times\cos 4\ 046\neq 1$，**故 A 错误；**

$f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+f(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2x+\pi)+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x=1+\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}\cos 2x=1$，**故 B 正确；**

当 $x\in(6,7)$ 时，$2x\in(12,14)$，由 $3\pi<12<4\pi<14<5\pi$ 可知，$f(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$ 在区间 $(6,7)$ 上先单调递减，后单调递增，**故 C 错误；**

由 $f(x_1)=f(x_2)=0.25$，得到 $\cos 2x_1=\cos 2x_2=\frac{1}{2}$，由 $\cos 2x=\frac{1}{2}$，得到 $x=\frac{\pi}{6}+k\pi$ 或 $x=\frac{5\pi}{6}+k\pi$，$k\in\mathbf{N}$，

又 $x_2>x_1\geqslant 0$，当 $x_1=\frac{\pi}{6}$，$x_2=\frac{5\pi}{6}$ 时，满足 $f(x_1)=f(x_2)=0.25$，此时 $x_2-x_1=\frac{2\pi}{3}$，**故 D 错误.**



9. AD 【**解析**】设函数 $f(x)$ 的最小正周期为 T，由题图可知 $A=2$，$\frac{T}{2}=7-3=4$，得 $T=8$，又 $T=\frac{2\pi}{|\omega|}$，$\omega>0$，所以 $\omega=\frac{\pi}{4}$.

将 $(3,0)$ 代入 $f(x)$ 的解析式，得 $0=2\sin\left(\frac{\pi}{4}\times 3+\varphi\right)$，又 $-\pi<\varphi<0$，解得 $\varphi=-\frac{3\pi}{4}$，所以 $f(x)=2\sin\left(\frac{\pi}{4}x-\frac{3\pi}{4}\right)$，**故 B 错误；**

令 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant\frac{\pi}{4}x-\frac{3\pi}{4}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，得 $1+8k\leqslant x\leqslant 5+8k$，$k\in\mathbf{Z}$，

即 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[1+8k,5+8k]$，$k\in\mathbf{Z}$，**故 A 正确；**

把函数 $f(x)$ 的图象向左平移 2 个单位长度，再把横坐标伸长到原来的 2 倍，得到的图象对应的函数为 $g(x)=2\sin\left(\frac{\pi}{8}x-\right.$

$\left.\frac{\pi}{4}\right)$，由 $0\leqslant x\leqslant 8$，得 $-\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\pi}{8}x-\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{3\pi}{4}$，所以 $-\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant\sin\left(\frac{\pi}{8}x-\frac{\pi}{4}\right)\leqslant 1$，所以 $g(x)$ 在 $[0,8]$ 上的值域为 $[-\sqrt{2},2]$，**故 C 错误**；

把函数 $f(x)$ 图象的横坐标伸长到原来的 2 倍，再向左平移 2 个单位长度，

得到的图象对应的函数解析式为 $h(x)=2\sin\left[\frac{\pi}{8}(x+2)-\frac{3\pi}{4}\right]=2\sin\left(\frac{\pi}{8}x-\frac{\pi}{2}\right)=-2\cos\frac{\pi x}{8}$，则 $h(-x)=h(x)$，所以 $h(x)$ 为偶函数，**故 D 正确**.

10. AC　【解析】$\because f(x)=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{2}$，$x\in\left(t,t+\frac{\pi}{2}\right)$，$\therefore 2x+\frac{\pi}{3}\in\left(2t+\frac{\pi}{3},2t+\frac{4\pi}{3}\right)$.

不妨令 $t=-\frac{\pi}{6}$，则 $2x+\frac{\pi}{3}\in(0,\pi)$，此时 $f(x)$ 单调递减，**故 A 正确**；

根据余弦函数图象知，若 $y=\cos\alpha$ 在区间 (x_1,x_2) 上有 3 个零点，则区间长度需要大于 2π，

而 $2x+\frac{\pi}{3}\in\left(2t+\frac{\pi}{3},2t+\frac{4\pi}{3}\right)$，故不存在 t 使上述区间长度大于 2π，**故 B 错误**；

当 $2x+\frac{\pi}{3}=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 时，$f(x)$ 取得最大值 $\frac{5}{2}$，$\therefore\ \exists t\in\mathbf{R}$，使得 $f(x)$ 有最大值 $\frac{5}{2}$，**故 C 正确**；

由 $f(x)=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{2}\in\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$，得 $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，

$\therefore 2x+\frac{\pi}{3}\in\left(-\frac{2\pi}{3}+2k\pi,-\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)\cup\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi,\frac{2\pi}{3}+2k\pi\right)(k\in\mathbf{Z})$，

又 $2x+\frac{\pi}{3}\in\left(2t+\frac{\pi}{3},2t+\frac{4\pi}{3}\right)$，故不存在 $t\in\mathbf{R}$，使得 $f(x)$ 的值域为 $\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$，**故 D 错误**.

11. AD　【解析】因为 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\beta\in$

$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，所以 $\alpha+\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$，又因为 $\sin(\alpha+\beta)=\tan\alpha>0$，所以 $\alpha+\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，

作出 $y=\sin x$ 和 $y=\tan x$ 的部分图象如图所示，可知 $\alpha<\pi-(\alpha+\beta)$.

对于 A，因为 $\alpha<\pi-(\alpha+\beta)$，$\pi-(\alpha+\beta)\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，且函数在 $y=\tan x$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，

所以 $\tan\alpha<\tan[\pi-(\alpha+\beta)]=-\tan(\alpha+\beta)$，

所以 $\tan\alpha+\tan(\alpha+\beta)<0$，**故 A 正确；**

对于 B，因为 $\alpha<\pi-(\alpha+\beta)$，$\pi-(\alpha+\beta)\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，且函数在 $y=\cos x$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减，

所以 $\cos\alpha>\cos[\pi-(\alpha+\beta)]=-\cos(\alpha+\beta)$，所以 $\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)>0$，**故 B 错误；**

对于 C，因为 $\alpha<\pi-(\alpha+\beta)=\pi-\alpha-\beta$，

所以 $2\alpha<\pi-\beta$，

所以 $\alpha<\frac{\pi}{2}-\frac{\beta}{2}$，即 $\frac{\beta}{2}<\frac{\pi}{2}-\alpha$，

因为 $\frac{\beta}{2}\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$，$\frac{\pi}{2}-\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

函数 $y=\sin x$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，

所以 $\sin\frac{\beta}{2}<\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$，

所以 $\sin\frac{\beta}{2}+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)<0$，**故 C 错误；**

对于 D，因为 $\alpha<\pi-(\alpha+\beta)=\pi-\alpha-\beta$，

所以 $2\alpha+\beta<\pi$，

所以 $2\alpha+2\beta<\pi+\beta$，

所以 $\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}+\frac{\beta}{2}$，即 $\frac{\beta}{2}>\alpha+\beta-\frac{\pi}{2}$，

因为 $\alpha+\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，

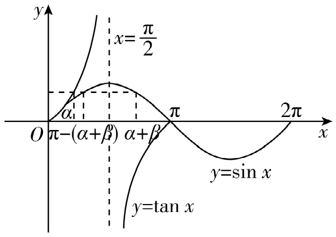
所以 $\alpha+\beta-\frac{\pi}{2}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

又因为 $\frac{\beta}{2}\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$，函数 $y=\sin x$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，

所以 $\sin\frac{\beta}{2}>\sin\left(\alpha+\beta-\frac{\pi}{2}\right)=$

$-\cos(\alpha+\beta)$，所以 $\sin\dfrac{\beta}{2}+\cos(\alpha+\beta)>0$，

故 D 正确.



12. $B\subsetneqq A\subsetneqq C$　【解析】$\because A=\{\alpha\mid\alpha=60°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}=\{\alpha\mid\alpha=60°+2n\cdot180°,n\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{\beta\mid\beta=60°+k\cdot720°,k\in\mathbf{Z}\}=\{\beta\mid\beta=60°+4n\cdot180°,n\in\mathbf{Z}\}$，$C=\{\gamma\mid\gamma=60°+n\cdot180°,n\in\mathbf{Z}\}$，$\therefore B\subsetneqq A\subsetneqq C$.

13. $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　【解析】由题意可知 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\left(\dfrac{3\pi}{8}-\dfrac{\pi}{8}\right)\times2=\dfrac{\pi}{2}$，

且 $\omega>0$，可得 $\omega=\dfrac{\pi}{T}=\dfrac{\pi}{\frac{\pi}{2}}=2$，

又 $f\left(\dfrac{3\pi}{8}\right)=A\tan\left(2\times\dfrac{3\pi}{8}+\varphi\right)=A\tan\left(\dfrac{3\pi}{4}+\varphi\right)=0$，

且 $-\dfrac{\pi}{2}<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$，$A\neq0$，则 $\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{3\pi}{4}+\varphi<\dfrac{5\pi}{4}$，

可得 $\dfrac{3\pi}{4}+\varphi=\pi$，即 $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$，

所以 $f(0)=A\tan\left(2\times0+\dfrac{\pi}{4}\right)=A\tan\dfrac{\pi}{4}=A=1$，即 $A=1$，

可得 $f(x)=\tan\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$，

所以 $f\left(\dfrac{7\pi}{24}\right)=\tan\left(2\times\dfrac{7\pi}{24}+\dfrac{\pi}{4}\right)=\tan\left(\pi-\dfrac{\pi}{6}\right)=-\tan\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

14. $\left[\dfrac{5}{2},\dfrac{8}{3}\right]$　【解析】因为 $\omega>0$，当 $0<x<\dfrac{\pi}{3}$ 时，$-\dfrac{\pi}{6}<\omega x-\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{\omega\pi}{3}-\dfrac{\pi}{6}$.

因为函数 $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{3}\right)$ 上存在最值，

所以 $\dfrac{\omega\pi}{3}-\dfrac{\pi}{6}>\dfrac{\pi}{2}$，解得 $\omega>2$.

当 $\dfrac{2\pi}{3}<x<\pi$ 时，$\dfrac{2\pi\omega}{3}-\dfrac{\pi}{6}<\omega x-\dfrac{\pi}{6}<\pi\omega-\dfrac{\pi}{6}$.

因为函数 $f(x)$ 在 $\left(\frac{2\pi}{3},\pi\right)$ 上单调，所以 $\left(\frac{2\pi\omega}{3}-\frac{\pi}{6},\pi\omega-\frac{\pi}{6}\right)\subseteq\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)(k\in\mathbf{Z})$，

所以 $\begin{cases}\frac{2\pi\omega}{3}-\frac{\pi}{6}\geqslant k\pi-\frac{\pi}{2},\\ \pi\omega-\frac{\pi}{6}\leqslant k\pi+\frac{\pi}{2},\end{cases}$ 其中 $k\in\mathbf{Z}$，

解得 $\frac{3}{2}k-\frac{1}{2}\leqslant\omega\leqslant k+\frac{2}{3}(k\in\mathbf{Z})$，所以 $\frac{3}{2}k-\frac{1}{2}\leqslant k+\frac{2}{3}$，解得 $k\leqslant\frac{7}{3}$.

又因为 $\omega>0$，所以 $k\in\{0,1,2\}$.

当 $k=0$ 时，$0<\omega\leqslant\frac{2}{3}$；

当 $k=1$ 时，$1\leqslant\omega\leqslant\frac{5}{3}$；

当 $k=2$ 时，$\frac{5}{2}\leqslant\omega\leqslant\frac{8}{3}$.

又因为 $\omega>2$，所以 ω 的取值范围是 $\left[\frac{5}{2},\frac{8}{3}\right]$.

15.【解】$f(\alpha)=\frac{-\cos\alpha\cdot(-\sin\alpha)\cdot(-\tan\alpha)}{-\tan\alpha\cdot(-\sin\alpha)}=-\cos\alpha.$

(1) $\because\cos\alpha=-\frac{2\sqrt{6}}{5}$，

$\therefore f(\alpha)=-\cos\alpha=\frac{2\sqrt{6}}{5}.$

(2) 将 $\alpha=-\frac{34\pi}{3}$ 代入函数 $f(\alpha)$ 的解析式得 $f\left(-\frac{34\pi}{3}\right)=-\cos\left(-\frac{34\pi}{3}\right)=-\cos\left(11\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}.$

16.【解】(1) 由函数 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{|\omega|}=\pi$，$\omega>0$，得 $\omega=2$，

又 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=0$，所以 $2\times\frac{\pi}{6}+\varphi=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，即 $\varphi=-\frac{\pi}{3}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

而 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{3}$，所以 $f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$.

(2) 若 $2f(x)-1\geqslant0$，即 $\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\geqslant$

$\frac{1}{2}$，则有 $\frac{\pi}{6}+2k\pi\leqslant 2x-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{5\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

即 $\frac{\pi}{4}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{7\pi}{12}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

故 x 的取值范围为 $\left[\frac{\pi}{4}+k\pi,\frac{7\pi}{12}+k\pi\right],k\in\mathbf{Z}$.

17.【解】(1) $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$，令 $\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$，

解得 $\frac{3\pi}{2}+4k\pi\leqslant x\leqslant\frac{7\pi}{2}+4k\pi(k\in\mathbf{Z})$，

所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left[\frac{3\pi}{2}+4k\pi,\frac{7\pi}{2}+4k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$.

(2)由 $f(x)\in[-1,\sqrt{2}]$，可得 $\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\in\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$，

当 $x\in[0,m]$ 时，$\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{m}{2}-\frac{\pi}{4}\right]$，故由正弦函数的性质可知 $\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{m}{2}-\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{5\pi}{4}$，解得 $\frac{3\pi}{2}\leqslant m\leqslant 3\pi$.

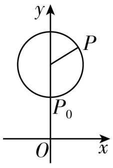
所以实数 m 的最大值为 3π.

18.【解】(1)如图，建立平面直角坐标系，当 $t=0$ 时，风车开始旋转时某叶片的一个端点 P 在风车的最低点，设为 P_0，则 $P_0(0,60)$，由题意得，$\omega=\frac{2\pi}{5}$，

$$\begin{cases}A+B=100+40,\\-A+B=100-40,\\S(0)=A\sin\varphi+B=60,\\|\varphi|<\pi,\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}A=40,\\B=100,\\\varphi=-\frac{\pi}{2},\end{cases}$

所以 $S(t)=40\sin\left(\frac{2\pi}{5}t-\frac{\pi}{2}\right)+100$.



(2)令 $S(t)\geqslant 80$，则 $S(t)=40\sin\left(\frac{2\pi}{5}t-\frac{\pi}{2}\right)+100\geqslant 80$，

即 $\cos\frac{2\pi}{5}t\leqslant\frac{1}{2}$，所以 $2k\pi+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{2\pi}{5}t\leqslant 2k\pi+\frac{5\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$，

解得 $\frac{5}{6}+5k\leqslant t\leqslant\frac{25}{6}+5k(k\in\mathbf{Z})$.

当 $k=0$ 时，$\frac{5}{6}\leqslant t\leqslant\frac{25}{6}$，$\frac{25}{6}-\frac{5}{6}=\frac{10}{3}$，

所以叶片旋转一圈内点 P 离地面的高度不低于 80 米的时长为$\frac{10}{3}$秒.

19.【解】(1)根据题意，$f\left(\frac{\pi}{3\omega}\right)=2\sin\left(\omega\cdot\frac{\pi}{3\omega}+\varphi\right)+1=2\sin\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right)+1=3$，得 $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right)=1$，即 $\varphi=\frac{\pi}{6}+2k\pi$，又 $0<\varphi<\pi$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$.

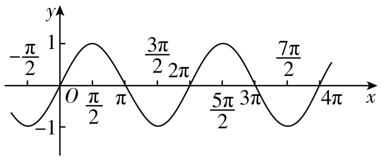
(2)根据题意，$f(x)=1$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$ 上有且仅有 3 个不同的实数解，

即 $\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)=0$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$ 上有且仅有 3 个不同的实数解.

设函数 $f(x)$ 的最小正周期为 T，则 $T\leqslant\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{6}<2T$，即 $\frac{\pi}{3}<T\leqslant\frac{2\pi}{3}$，又 $\omega>0$，所以 $3\leqslant\omega<6$，

由于 $\omega x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\omega\pi}{6}+\frac{\pi}{6},\frac{5\omega\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right]$，

则$\frac{2\pi}{3}\leqslant\frac{\omega\pi}{6}+\frac{\pi}{6}<\frac{7\pi}{6}$，且$\frac{8\pi}{3}\leqslant\frac{5\omega\pi}{6}+\frac{\pi}{6}<\frac{31\pi}{6}$，根据正弦函数的图象性质，



可知当$\frac{2\pi}{3}\leqslant\frac{\omega\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\leqslant\pi$ 时，$3\pi\leqslant\frac{5\omega\pi}{6}+\frac{\pi}{6}<4\pi$，解得$\frac{17}{5}\leqslant\omega<\frac{23}{5}$；

当 $\pi<\frac{\omega\pi}{6}+\frac{\pi}{6}<\frac{7\pi}{6}$时，$4\pi\leqslant\frac{5\omega\pi}{6}+\frac{\pi}{6}<5\pi$，解得 $5<\omega<\frac{29}{5}$.

综上，ω 的取值范围为 $\left[\frac{17}{5},\frac{23}{5}\right)\cup\left(5,\frac{29}{5}\right)$.

(3) 因为 $f(x)=2\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)+1$,

若选择①，当 $x\in[\pi,2\pi]$ 时，$\omega x+\frac{\pi}{6}\in\left[\omega\pi+\frac{\pi}{6},2\omega\pi+\frac{\pi}{6}\right]$.

设函数 $f(x)$ 的最小正周期为 T，根据题意可得 $\frac{T}{3}\leqslant2\pi-\pi\leqslant\frac{2T}{3}$，即 $\frac{3\pi}{2}\leqslant T\leqslant3\pi$，

所以 $\frac{2}{3}\leqslant\omega\leqslant\frac{4}{3}$，所以 $\frac{5\pi}{6}\leqslant\omega\pi+\frac{\pi}{6}<\frac{3\pi}{2}$，$\frac{3\pi}{2}\leqslant2\omega\pi+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{17\pi}{6}$，

因为函数 $f(x)$ 在 $[\pi,2\pi]$ 上的值域为 $[-1,2]$，即 $\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)\in\left[-1,\frac{1}{2}\right]$，根据正弦函数的图象性质，可知

当 $\omega\pi+\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$ 时，$\frac{3\pi}{2}\leqslant2\omega\pi+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{13\pi}{6}$，当 $2\omega\pi+\frac{\pi}{6}=\frac{13\pi}{6}$ 时，$\frac{5\pi}{6}\leqslant\omega\pi+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{3\pi}{2}$，当 $\omega\pi+\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$ 时，$\omega=\frac{2}{3}$，此时 $2\omega\pi+\frac{\pi}{6}=\frac{3\pi}{2}$，符合题意，所以 $f(x)=2\sin\left(\frac{2}{3}x+\frac{\pi}{6}\right)+1$，当 $2\omega\pi+\frac{\pi}{6}=\frac{13\pi}{6}$ 时，$\omega=1$，此时 $\omega\pi+\frac{\pi}{6}=\frac{7\pi}{6}$，符合题意，所以 $f(x)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+1$,

综上，$f(x)=2\sin\left(\frac{2}{3}x+\frac{\pi}{6}\right)+1$ 或 $f(x)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+1$.

若选择②，由函数 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$ 上的最大值与最小值的差为 3，

即 $y=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$ 上的最大值与最小值的差为 $\frac{3}{2}$,

又因为 $\omega>0$，$y=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象可由 $y=\sin x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后再伸缩得到，所以 $y=\sin\left(\omega x+\right.$

$\left.\frac{\pi}{6}\right)$在$\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$上先单调递增后单调递减,最大值为 1,

故 $\sin\left(-\frac{\pi\omega}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$,所以 $\omega=1$,

故$f(x)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+1$.